

سبع مقال

فصل اول : صفحہ ریاضی

\* گزارشہ ما صفحہ ۱

تمرین ۹

\* عم ارزش گزارہ ما صفحہ ۱۲

تمرین ۱۹ : صفحہ

\* بیان عام صفات گزارہ عام شرط صفحہ ۲۱

تمرین ۲۴ : صفحہ

\* توقولوہ صفحہ ۲۵

تمرین ۳۱ : صفحہ

\* روشنائی اثبات صفحہ ۳۳

تمرین ۴۰ : صفحہ

\* گزارشہ فادورہ ما صفحہ ۴۶

تمرین ۷۳ : صفحہ

فصل دوم : رابطہ عام عم ارزشی

\* رابطہ صفحہ ۸۱

تمرین ۱۰۱ : صفحہ

\* خواص رابطہ ما صفحہ ۱۰۴

تمرین ۱۱۵ : صفحہ

\* رابطہ عام عم ارزشی صفحہ ۱۱۸

تمرین ۱۳۵ : صفحہ

\* معاشی رابطہ توسط فائرس صفحہ ۱۳۸  
\* معاشی رابطہ توسط گران صفحہ ۱۴۸  
قرینہ صفحہ ۱۵۴

مفل سوار رابطہ عامی تریشی  
\* رابطہ تریشی صفحہ ۱۵۷  
قرینہ صفحہ ۱۶۸  
\* معاشی رابطہ توسط فائرس صفحہ ۱۷۲  
قرینہ صفحہ ۱۸۶  
\* حیدر خوجہ شکر خاص صفحہ ۱۹۲  
قرینہ صفحہ ۲۰۸

①

بسم تعالی

درس ریاضی کسسته

صانع درس

① کتاب سخنان عام کسسته (تألیف خانم ها سورانی یا زار و حبیبی)

(نشر پیا ۲ خور)

② کتاب سخنان عام کسسته (تألیف خانم دکتر سعید اوطابی)

③ انتشارات دانشگاه صنعتی شریف  
(تألیف دکتر بهروز قلیزاده)

مباحث درس

منطق ریاضی - رابط عام - هم ارز - رابط عام ترتیبی - گراف -  
رابط عام انگشتی

فصل اول منطق ریاضی

این فصل شامل حساب گزاره ها - هم ارز - ردی عام اثبات و  
گزاره ها عادی و عادی می باشد

مفاهیم در ریاضی ۱: دسته اند، تعریف - تعریف نشده - مقیم - اصول

definition:  
undefined:  
theorem  
axiom

تعریف  
تعریف نشده  
مقیم  
اصل

\* دسته اول تعاریف ریاضی

مفاهیمی که به تعریف (توضیح) دقیق ریاضی دانسته باشند در منطق  
طبیعی قابل بیان، خطی است که از یک رأس به وسط ضلع مقابل متجه شود  
و ضلع مقابل را - دو قسمت مساوی تقسیم می کند  
و یا نیمساز یک زاویه خطی است که از رأس دو ضلع مساوی تقسیم می کند

②

\* دسته دوم: معانی تریف نشده

دسته اول از معانی که دارای تریف دقیق و صریح در ریاضیات باشند،  
بطور مثال مجموع، میان غیر دقیق چنین تریف می شود، دسته اول از اینها  
یا افراد یا اعداد که دارای صفت یا ویژگی مشترک باشند، اینها نیز  
دقیق است زیرا صفت یا ویژگی ریاضی ندارد و همچنین دسته تریف  
ریاضی ندارد زیرا برای هر دو، به مفهوم کرده و یا به مجموع دوباره  
باز می گردیم و یا به مفهوم ملکسیون، در حالی که قرار خود مجموع را تریف کنیم  
عین یا به مثابه ملکات صفت و دسته در ریاضیات بطور دقیق تریف شده  
باشند که چنین نیست.

\* دسته سوم: مفهوم مقیم

مقیم به قوانین گفته می شود که درستی آنها را می بینیم و بر اساس معانی تریف  
شده و یا شده و یا مقایسه اصول پذیرفته قابل اثبات باشد، بطور مثال ثابت  
می شود اگر مثلث متساوی الساقین باشد ارتفاع و میانه وارد در ضلع سوم  
بر هم منطبق اند به عبارتی ارتفاع وارد بر ضلع سوم، عمود و نصف است.

\* دسته چهارم: اصول ریاضی

قوانینی که درستی آنها را می بینیم ولی قابل اثبات توسط معانی و معانی تریف شده و  
تریف نشده، یا اصول پذیرفته شده، بطور مثال می بینیم اگر 4 کوچکتر از 5 باشد و  
3 کان، دست کم در یکی از گانه ها بیشتر از یک کوچکتر از 4 باشد، این مطلب  
قابل پذیرش و درک است ولی قابل اثبات نیست و آنرا تحت عنوان اصل  
کانه کوچکتر می نامیم و یا اصل انتخاب.

قابل ذکر است که تعداد معانی تریف نشده و نه از اصول ریاضی که در  
مستحق و معین است (در ریاضیات).

با مقدمه فوق حساب گزاره ها، اعداد و کسرها، زیرا گزاره ها که مفهوم  
تریف نشده ریاضی است ولی به بیان غیر دقیق یک جمله خبری است که  
درستی یا نادرستی آن قابل تشخیص باشد، به بیان غیر دقیق زیرا "خبر"

تکریف ریاضی ندارد.

بنابرین جمله خبریه که دارای ارزش درست و یا دارای ارزش نادرست فقط یکبار از این دو باشد را گزاره می نامیم.

اگر درست باشد به آن T مخفف میگویند و اگر نادرست باشد به آن F مخفف میگویند. FALSE را نیست میگویند، صفتاً گزاره ها را با حرف و کلماتی که انقیاس بطور مثال  $p$  یا  $q$  یا  $r$  یا ... نشان می دهیم.

مثال: از بین جملات زیر کدامیک گزاره است و از بین گزاره ها، صحیح، ناصحیح یا درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) عدد ۱ در ۱ برابر است. جمله ریاضی است پس گزاره نیست.

ب) کلیت را با یکسان. // امری است //

ج) آیا فرادعا هوای ایران است؟ // پرسشی //

ح) عدد خوشبخت است. جمله خبریه است ولی خوشبختی در فرقه ها می

مختلف معنی متفاوتی دارد بنابرین ارزشی این

جمله برای بعضی درست و برای بعضی نادرست است

به عبارتی درستی یا نادرستی آن قابل تشخیص نیست پس این جمله گزاره نیست.

ز) تهران مرکز ایران است. گزاره درست.

و) پاییز دومین فصل سال است. // نادرست //

ط)  $7 + 5 = 12$  // درست //

ی)  $7 \times 5 = 40$  // نادرست //

ک) دسیه با یک اکمده. جمله خبریه است که ارزشی ندارد (راهی توان)

تعیین نکرد.

ل)  $x + 2 = 5$

اندرج این عبارت مقدار  $x$  مشخص ندارد و

قابل تشخیص نیست اگر  $x = 3$  یا  $x = 2$  یا ... صحیح

و در غیر این صورت نادرست است پس گزاره نیست.

در زبان فارسی معمولاً جملات خبری ساده یک فعلی گزاره اند که در زیر مثال (۴)  
 آنها گزاره ها ساده می نامند و از ترکیب آنها گزاره ها مرکب ساخته می شود.  
 گزاره ها ساده را با حروف کوچه زبان انگلیسی مانند  $p, q, r$  ...  
 نشان می دهند و گزاره ها مرکب را با حروف بزرگ زبان انگلیسی.  
 از ترکیب جملات خبری ساده یک فعلی گزاره ها مرکب ساخته می شود و آنها را  
 معمولاً با حروف بزرگ زبان انگلیسی مانند  $P, Q, R$  ... نشان می دهند.

### \* وسایل ترکیب گزاره ها

برای ترکیب گزاره ها از وسایل و ابزار زیر استفاده می شود.

#### ۱- ترکیب عطفی

فارسی ... و ...  
 لاتین ... and ...  
 عبار ریاضی ...  $\wedge$  ...

مانند: آسمان ابری بود و باران آمد.  
 $p \wedge q$

#### ۲- ترکیب فصلی

فارسی ... یا ...  
 لاتین ... or ...  
 عبار ریاضی ...  $\vee$  ...

مانند: احمد در باغ بود یا علی از سفر بازگشت.  
 $p \vee q$

#### ۳- ترکیب شرطی

فارسی اگر ... آنگاه ...  
 لاتین if ... then ...  
 عبار ریاضی  $p \rightarrow q$

اگر امروز جمع باشد آنگاه امروز تعطیل است.

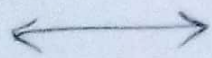
(4)

در این صورت  $p$  را فرض و  $q$  را حکم یا  
 $p$  شرط و  $q$  جواب شرط یا  
 $p$  و  $q$  جزای شرط یا  
 $p$  کفایت شرط و  $q$  الزوم شرط یا  
 $p$  را مقدم و  $q$  را نتیجه می نامند.

۴- ترکیب دو شرط

لاتین

نماد ریاضی



if and only if

آنها را اگر

مانند، مثلث متساوی الاضلاع است آنها را اگر و فقط اگر برابر باشند

در خط اول،  $p$  موازی با  $q$  است اگر و فقط اگر  $p \leftrightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| T   | T   | T            | T          | T                 | T                     |
| T   | F   | F            | T          | F                 | F                     |
| F   | T   | F            | T          | T                 | F                     |
| F   | F   | F            | F          | T                 | T                     |

نماد ریاضی

لاتین

Not

۵- نفی یا نفي

فارس

چنین نیست که

مانند، چنین نیست که احمد دانشجو است

| $p$ | $\sim p$ |
|-----|----------|
| T   | F        |
| F   | T        |

۶- هم چنین از اینتر دکر و هم و اگر و فقط اگر برای نشان دادن ترتیب و اولویت عملگرها استفاده می شود.

⑥

مانند  $Q = \{ [\sim (p \wedge q)] \rightarrow r \} \leftrightarrow s$

در گزاره مرکب

به نقد پراکنش و کرده شد و آنگاه در جدول اول ترکیب عطفی و بعد نقض و بعد ترکیب شرطی و سپس ترکیب دو شرطی باید عمل کند.

در اینجا نیز مانند محاسبات کامپیوتری از داخل ترین پراکنش شروع به انجام عملیات کردیم و سپس به سمت خارج می‌آئیم، همچنین واضح است هر گزاره

ممکن است  $T$  یا ممکن است  $F$  باشد (دارد ۲ درجه یا ۴ گزاره ممکن است  $T$  یا ممکن است  $F$  باشد دروغ باشد یا نه دارد)

مستقل موجود است و در نتیجه  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  یعنی  $2^4 = 16$  حالت

را بررسی می‌کند. یک روش برای تجزیه و تحلیل درستی یا نادرستی گزاره‌ها استفاده از جدول ارزش است. مثال جدول ارزش گزاره

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $[\sim(p \vee q)] \rightarrow r$ |
|-----|-----|-----|------------|------------------|----------------------------------|
| T   | T   | T   | T          | F                | T                                |
| T   | T   | F   | T          | F                | T                                |
| T   | F   | T   | T          | F                | T                                |
| T   | F   | F   | T          | F                | T                                |
| F   | T   | T   | T          | F                | T                                |
| F   | T   | F   | T          | F                | T                                |
| F   | F   | T   | F          | T                | F                                |
| F   | F   | F   | F          | T                | F                                |

مثال ۱ ارزش گزاره زیر را با در نظر گرفتن  $n=2$  و  $y=1$  تعیین کنید.

$$[(n=3 \text{ and } y < 9) \text{ or } y < 4] \text{ and } [\sim(n=2 \text{ and } y \geq 4)]$$

$$[(F \wedge T) \vee T] \wedge \sim(T \wedge F)$$

$$\underbrace{F \quad T}_T \wedge \underbrace{T \quad F}_F = T$$

⑦

مثال ۱ با فرض آنکه  $p$  و  $q$  ۲ - ترتیب گزاره های

"تلف در در" و "علی امتحان را درست داده است" و  
 "علی این درس را نگذاشته است" باشد

گزاره های زیر را به فارسی روان بنویسید

آثر علی تلف دارد پس امتحان را درست داده است  $p \rightarrow q$

علی امتحان را درست داده است اما اثر تلف در درها اثر  
 این درس را پاس کرده باشد  $(\sim q) \leftrightarrow r$

علی تلف دارد یا امتحان را درست داده است یا این درس  
 را نگذاشته است  $p \vee r \vee q$

$q \rightarrow (\sim r)$  و  $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$  و  $[r \wedge (\sim q)] \vee (q \wedge p)$

توجه موارد به عنوان تمرین با عنوانده و آنرا بنویسید  
 $(q \rightarrow \sim r) \vee (p \rightarrow \sim r)$  ؟

نکته ۱) در گزاره شرطی  $p \rightarrow q$  اگر  $p$  نادرست باشد واضح است که

صرف نظر از ارزش  $q$  گزاره شرطی  $p \rightarrow q$  همواره صبیح است

این حالت صبیح بودن را در گزاره شرطی، حالت انتقال مقدم یا

درستی گزاره شرطی بنابر تعریف مقدم می نامیم، بطور مثال

اگر  $2+2=5$  آنگاه خطوط پرواز می کند.

T F

و یا اگر  $2+2=5$  آنگاه آب پرواز می کند.

F F

T

(۲) قابل ذکر است که قطعاتی مانند اما، ولی، و لیکن، و الا، و یا وجود دارند. ①  
 نیز برای ترکیب گزاره‌ها و ترکیب جملات خبری نگارش رود، معمولاً زمانی نگارش  
 می‌رود که دو جمله یکی مثبت و یکی منفی باشد و مانند «فلان» و «و» بین ترکیب  
 عطف عمل می‌کنند. مانند علی تلاش کرد اما موفق نشد.

۶۸۹

۶

۶

و یا امروز، مدرسه نمی‌رودم یا وجود اینک امتحان داریم.

۶۸۹

۶

۶

عصیان و سایر ترکیب دیگر هم وجود دارد که شاید جنبه اولی نباشند  
 که بعد از ارائه خواهر شد.

در عین فصل

۱- جدول ارزش گزاره‌ها را بنویسید.

$$p \rightarrow [q \leftrightarrow (p \wedge q)], (p \rightarrow \sim q) \rightarrow (r \rightarrow p)$$

$$[(\sim p) \leftrightarrow (\sim q)] \leftrightarrow (q \leftrightarrow r), (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r, p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \\ [(p \wedge \sim p) \rightarrow q, [(\sim p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q, (p \leftrightarrow r) \wedge [(\sim q) \rightarrow q]$$

۲- با فرض درست بودن گزاره شرفه  $p \rightarrow q$  در درستی گزاره‌ها زیر

تفقی کنید

$$p \wedge q, (\sim p) \vee q, q \rightarrow p, (\sim p) \rightarrow (\sim q), (\sim q) \rightarrow (\sim p)$$

۳- با فرض آنکه  $p$  و  $q$  و  $r$  به ترتیب گزاره‌ها زیر باشند،

"میانبر است" قبول شد و "میانبر نیست" حاصل کرد.

"میانبر نیست" گزاره را آورد، عبارت‌ها زیر را بر حسب  $p$  و  $q$  و  $r$  عبار

رای بنویسید.

الف میانبر نیست گزاره را آورد، اما تمرین حاصل کرد.

ب میانبر است قبول شد، تمرین حاصل کرد، و میانبر نیست

گزاره را آورد.

ج میانبر نیست گزاره را آورد است اگر تمرین حاصل کرد.

حاصل کرد.

د میانبر است قبول شد اما تمرین حاصل کرد و این وجود  
میانبر نیست گزاره را آورد.

ه- کدامیک از عبارت‌ها زیر گزاره است.

الف  $2 \times 3 = 6$  گزاره است.  $>$  (تفاوت) یا نیست این است.

ب  $1$  در  $10$  مساوی است. هر کتاب را بخوان.

ج  $1$  من، حیوان باهوشی است.

⑩

۵- با فرض آنکه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند و  $p$  گزاره درست است.  
 $q$  گزاره نادرست است.  
آیا گزاره  $p$  درست است؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶- با فرض آنکه  $p$  و  $q$  ترتیب گزاره‌ها زیر باشند.  
 $p$  هوا عال است  
 $q$  علی به کوه می‌رود

گزاره  $p$  و  $q$  را با عبارتی بنویسید.

$p \leftrightarrow q$  و  $p \vee q \sim p \rightarrow \sim q$

۷- ارزش گزاره‌ها زیر را تعیین کنید.

الف اگر  $2+2=4$  آنگاه طوطی پرواز می‌کند.  
ب اگر  $2+2=4$  آنگاه اسب پرواز می‌کند.  
ج اگر  $2+2=5$  آنگاه طوطی پرواز می‌کند.  
د اگر  $2+2=5$  آنگاه اسب پرواز می‌کند.

ه اگر  $2+2=4$  آنگاه نه طوطی پرواز می‌کند.  
و اگر  $2+2=4$  آنگاه نه اسب پرواز می‌کند.  
ز اگر  $2+2=5$  آنگاه نه اسب پرواز می‌کند.

۸- جملات زیر را با عبارتی بنویسید.

الف این کتاب جالب است اما تمرین‌ها آن مشکل است.

ب این کتاب جالب نیست، تمرین‌ها آسان است اما موضوعات آن ساده است.

ج این کتاب جالب است به این معنی است که موضوع کتاب مشکل نیست و برعکس.

د موضوع کتاب سخت نیست اما کتاب جالب است و تمرین‌ها آن مشکل است.

ه این کتاب جالب است یا اینکه موضوع آن مشکل است.

②

۱- ارزش گزاره‌ها  $p, q, r, s$  به ترتیب (از چپ به راست) دارای ارزش  $F$  و  $F$  و  $T$  و  $T$  باشند. ارزش گزاره‌ها را زیر را تعیین کنید.

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s) \quad / \quad (p \rightarrow \sim q) \rightarrow (s \rightarrow r)$$

$$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \vee q) \quad / \quad p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \quad / \quad (p \wedge r) \leftrightarrow s$$

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ |
|-----|-----|-----|-----|
| T   | T   | F   | F   |

۱- ارزش گزاره‌ها  $p \wedge q$  و  $p \rightarrow (r \wedge q)$  و  $r \rightarrow (s \vee u)$  و  $\sim s$  صحیح باشند. کدامیک از گزاره‌ها را زیر صحیح است.

$$(q \wedge \sim u) \quad (q \wedge r) \quad u$$

تعريف گزاره هاى هم ارز

دو گزاره كه در همه حالاتهاى منطقى ممكن داراى ارزش يكسان باشند (دو گزاره هم ارزى نامى به عبارتى وقتى هم زمان در يك حده دل ارزى هم رسم شوند ستون ارزش هم شرط - اين دو گزاره كاملاً يكى باشد. براى عنايت هم ارزى گزاره هاى معاد  $\equiv$  استفاده مى كنيم

\*  $p \rightarrow q \equiv q \vee \sim p$

مثال ۱

| p | q | $p \rightarrow q$ | $\sim p$ | $q \vee \sim p$ |
|---|---|-------------------|----------|-----------------|
| T | T | T                 | F        | T               |
| T | F | F                 | F        | F               |
| F | T | T                 | T        | T               |
| F | F | T                 | T        | T               |

قانون معادل تركيب شرطى

\*  $\sim(\sim p) \equiv p$  قانون نفى معكوف

\*  $p \vee q \equiv q \vee p$  ,  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  قانون جابجايى

\*  $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$  ,  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$  قانون شريك پذيرى يا انجمن

مطابق قانون بالا اگر همه عوامل با علامت  $\wedge$  يا همه عوامل با علامت  $\vee$  هم مقيد شده باشند يا از به نوشتن پراسترند ايم و اين قانون را مى توان براى هر تعداد متغىر از گزاره هاى خارجى

\*  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$   
 $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$  قانون كسرى يا توزيع پذيرى

\*  $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$   
 $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$  قانون دوگان

قانون دوگان را نيز مى توان - هر تعداد متغىر از گزاره هاى مقيد را

$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv (\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee \dots \vee (\sim p_n)$   
 $\sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv (\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge \dots \wedge (\sim p_n)$

$$* p \rightarrow q \equiv (\sim q) \rightarrow (\sim p) \quad \text{قانون عکس نقیض}$$

$$* p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad \text{قانون معادل ترکیب دوطرفه}$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim q)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

$$* \sim(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p) \leftrightarrow q$$

$$\equiv (\sim q) \leftrightarrow p$$

$$p \equiv p \vee p \quad \text{قانون خودخوان}$$

$$p \equiv p \wedge p$$

$$p \equiv p \wedge (p \vee q)$$

$$p \equiv p \vee (p \wedge q)$$

$$p \vee \sim p \equiv T$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

قانون عدم اعتناء نقیض

همه ارزشهای فوق یکدست است، جدول ارزش گزاره ها، ثابت می شود وقت عنوان قواعد هم ارزش آنها را می شناسیم.

در حالت کلی برای اثبات یک رابطه هم ارزش می توان از جدول ارزش یکدست گرفت و یا به کمک قواعد هم ارزش، اثبات کرد.

مثال ۱ جدول یکدست، هم ارزشی را زیر اثبات کنید.

$$p \wedge \sim q \equiv \sim(p \rightarrow q), (p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$p \wedge \sim q \stackrel{?}{\equiv} \sim(p \rightarrow q)$$

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(q \vee \sim p)$$

$$\equiv (\sim q) \wedge \sim(\sim p)$$

$$\equiv (\sim q) \wedge p$$

$$\equiv p \wedge \sim q$$

معادل ترکیب دوطرفه  
دو طرفه  
نفي مضاعف  
جابجایی

$$(p \wedge q) \rightarrow r \stackrel{?}{\equiv} p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (q \rightarrow r) \vee \sim p$$

$$\equiv (r \vee \sim q) \vee \sim p$$

$$\equiv r \vee [(\sim q) \vee \sim p]$$

$$\equiv r \vee \sim(q \wedge p)$$

$$\equiv (q \wedge p) \rightarrow r$$

$$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

معادل ترکیب دوطرفه  
معادل ترکیب دوطرفه  
شرکت پذیری  
دو طرفه  
معادل ترکیب دوطرفه  
جابجایی

۱۴

مثال تعیین کنید کدام گزاره‌ها را گزاره‌ها می‌نامند:  $p \rightarrow q$  ، هم‌ارز است.

$$(\sim q) \rightarrow \sim p \quad \vee \quad q \vee \sim p \quad \vee \quad \sim(p \wedge \sim q)$$

حل ۱ قانون عکس نقیض گزاره شرطی  $p \rightarrow q \equiv (\sim q) \rightarrow \sim p$

$$p \rightarrow q \equiv q \vee \sim p$$

مادل ترکیب شرطی

$$\sim(p \wedge \sim q) \equiv (\sim p) \vee \sim(\sim q) \equiv (\sim p) \vee q$$

مادل ترکیب شرطی نفی صغایف

نابین هر سه گزاره را گزاره شرطی  $p \rightarrow q$  هم‌ارزند.

در اثبات هم‌ارزها معمولاً سعی می‌شود صحت عبارات اول و آخر را ساده کرد تا به صفت کوتاه‌تر رسید.



۱۶) ... و نه هر دو، که با علامت  $\oplus$  یا  $\vee$  نشان داده می شود، یا مکه XOR، که این وسیله انتخاب است یعنی زمان برقرار است که فقط و فقط یکی از این دو گزاره یا شرط و گاه آ را با لفظ  $p$  و  $q$  هر یک را می گویند.

$$p \oplus q = p + q = p \vee q$$

$$p \oplus q = (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$

| p | q | $p \oplus q$ |
|---|---|--------------|
| T | T | F            |
| T | F | T            |
| F | T | T            |
| F | F | F            |

$$p \oplus q$$

مثال اگر عدد حلیلی یا زوج است یا فرد

عدد حلیلی زوج است ۱

فرد ۱

مثال ۱، منابع دانشگاه پذیرفته می شود و آلایه خدمت سربازی می برد

$$p \oplus q$$

۲- ترکیب sheffer NOR (نفر هاس مقبول)

مکه NOR از ترکیب Not و OR ساخته شده است و

در فارسی به صورت نه ... و نه ... و با علامت  $\downarrow$  در ریاضی نشان داده می شود.

$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

$$p \downarrow q \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

مثال اگر از ماشین ها در حیابان، نه راه می روند و نه راه می دهند.

| p | q | $p \downarrow q$ |
|---|---|------------------|
| T | T | F                |
| T | F | F                |
| F | T | F                |
| F | F | T                |

مثال ۱- کتک تابع ارزشی sheffer فرمول  $\sim p$  و  $p \wedge q$  را بیان کنید.

حالا  
عنوان  $\sim p \equiv (\sim p) \wedge (\sim p)$   
تعریف تابع ارزشی  $\downarrow p \equiv p \downarrow p$

$$p \wedge q \equiv [\sim(\sim p)] \wedge [\sim(\sim q)] \quad \text{نفر صفا ع}$$

$$\equiv (\sim p) \downarrow (\sim q) \quad \text{نفر تابع ارزشی} \downarrow$$

$$\equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \quad \text{نفاصت اول تمرین}$$

۳- ترکیب سازگاری با عبارات یا ↑ نشانه داده می شود و یا کلمه NAND،  
NAND ترکیب دو کلمه Not و And می باشد و در فارسی به صورت  
نه ... نه ... نه ... نه ... می شود.

$$p \uparrow q \equiv \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

| p | q | $p \uparrow q$ |
|---|---|----------------|
| T | T | F              |
| T | F | T              |
| F | T | T              |
| F | F | T              |

نبا برین معکوس منطقی ارائه شده در این درس عبارتند از:

|                   |                |                                   |
|-------------------|----------------|-----------------------------------|
| $\wedge$          | and            | ترکیب عطف                         |
| $\vee$            | OR             | "مقتل"                            |
| $\rightarrow$     | if - then      | ترکیب دو شرط                      |
| $\leftrightarrow$ | if and only if | "شرط"                             |
| $\sim$            | Not            | نفر یا نعتیق                      |
| $\oplus$          | XOR            | یا منطقی یا استقصاص یا مانع الجمع |
| $\downarrow$      | NOR            | نفرها منقتل                       |
| $\uparrow$        | NAND           | نا سازگاری                        |

۱- برای اثبات عدم هم ارز بودن دو عبارت می توان از جدول ارزش استفاده کرد و یا فقط ترکیب منطقی از دو گزاره را نشان داد که با هم یک نیست. معقول مثال در درستی هم ارز بودن زیر تحقیق کنید.

$$p \rightarrow q \stackrel{?}{=} \sim(p \wedge q)$$

| p | q | $p \rightarrow q$ | $p \wedge q$ | $\sim(p \wedge q)$ |
|---|---|-------------------|--------------|--------------------|
| T | T | T                 | T            | F                  |
| T | F | F                 | F            | T                  |
| F | T | T                 | F            | T                  |
| F | F | T                 | F            | T                  |

۱۸) به کمک جدول فوق می بینیم که ستون ارزشی دو گزاره مذکور یکی نیست.  
در سطر اول و دوم متساوی هستند. و یا می توان گفت فقط به ذکر حالت زیر پیوسته کرد،  
ارزش اول و دوم صحیح و گزاره ۲ غلط باشد عین  $\frac{p}{T} \mid \frac{q}{F}$

$$\begin{array}{cc} p & \rightarrow & q \\ T & & F \\ \hline & & F \end{array}$$

$$\sim (p \wedge q) \\ \begin{array}{cc} T & F \\ \hline & F \\ & T \end{array}$$

$$\frac{p}{T} \mid \frac{q}{F}$$

$\neq$

$$\begin{array}{cc} p & \rightarrow & q \\ T & & T \\ \hline & & T \end{array}$$

$$\sim (p \wedge q) \\ \begin{array}{cc} T & T \\ \hline & T \\ & F \end{array}$$

$$\frac{p}{T} \mid \frac{q}{T}$$

$\neq$

عین فقط یکی از حالتها را اشتداف را بیان نکرد.

- ۱- قوانین هم ارز را به کمک جدول ثابت کنید.
- ۲- تعیین کنید کدامیک از قوانین هم ارز در دستورهای زیر برای نام نویسی با کلاس در هم ارز می باشد زیرا استفاده شده است.

الف

$$[(a=7) \text{ or } (a>5)] \text{ and } (y=0) \equiv [(a=7) \text{ and } (y=0)] \text{ or } [(a>5) \text{ and } (y=0)]$$

ب

$$(a=7) \text{ or } (\text{not} [(b \leq 5) \text{ and } (c=0)]) \equiv ((a=7) \text{ or } (b > 5)) \text{ or } (c \neq 0)$$

۳- به کمک جدول ثابت کنید  $p \rightarrow q$  با گزاره های زیر هم ارز است.

$$(\sim p) \vee q, (\sim q) \rightarrow \sim p, \sim(p \wedge \sim q)$$

۴- به کمک قوانین هم ارز (بدون استفاده از جدول) ثابت کنید.

$$p \wedge \sim q \equiv \sim(p \rightarrow q) \quad / \quad [(\sim p) \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv r$$

$$(\sim p) \wedge (\sim q) \equiv \sim[p \vee ((\sim p) \wedge q)]$$

$$(\sim p) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

- ۵- تعیین کنید کدامیک از هم ارزهای زیر صحیح است.

$$p \equiv (p \vee q) \wedge \sim[(\sim p) \wedge q]$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim(p \vee q)$$

$$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (\sim r) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

- ۶- در گزاره های زیر تعیین کنید مطلقاً یا به کاررفته یا به صورت ترکیب مفصل است یا این مانع الجمع.

الف- همراه غذا چای نوشیده می شود یا نه.

ب- برای خرید این کالا از پول نقد استفاده می کنید یا از چک.

ج- برای استخدام در این شرکت، تجربه برنامه نویسی به زبان `java` یا `c++` مورد نیاز می باشد.

۴۰

→ برای ثبت نام در دروس ریاضی، باید دروس ریاضی یک یا یکی از دروس رشته کامپیوتر را گذرانده باشید.

و شما هم

هر دو رشته ریاضی می خوانید یا رشته کامپیوتر.

۵۱ اگر من عبور می توانم یک عدد یا حداقل سه رقم باشد، یا اینکه یک کلمه، حداقل هست کلمات باشد (کلمات: هر عبارت قابل نمایش در کامپیوتر).

۵۲ با فرض آنکه گزاره  $\neg (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \vee \neg x_n)$  صحیح باشد، ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید.

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$$

$$[(\neg x_1) \wedge x_2] \vee [(\neg x_2) \wedge x_3] \vee \dots \vee [(\neg x_{n-1}) \wedge x_n]$$

$$(\neg x_1) \wedge (\neg x_2) \wedge \dots \wedge \neg x_n$$

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \vee x_n)$$

۸- در منطق سه مقدار درست = 1، نادرست = 0، و غیض نام =  $\frac{1}{2}$

اگر  $A=1$  و  $B=\frac{1}{2}$  و  $C=0$  و  $D=\frac{1}{2}$ ، ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید.

$$[(A \rightarrow B) \vee C] \rightarrow D$$

$$[(A \wedge B) \rightarrow C] \vee D$$

$$A=1, B=\frac{1}{2}$$

$$A \vee B=1$$

$$A \wedge B=\frac{1}{2}$$

۹- تعیین کنید گزاره  $(p \vee q) \rightarrow [p \vee (\neg q) \vee r]$  با کدام گزاره های زیر هم ارزش است.

$$p \vee (\neg q) \vee r$$

$$[(\neg p) \vee q] \wedge \neg r$$

$$(p \vee \neg q) \wedge \neg r$$

$$(\neg p) \vee q \vee r$$

# حقیقه نکته راجع به ترکیب شرط و دو شرط

- \* نکته اول در ترکیب شرط  $p \rightarrow q$  ،  $p$  را فرض یا مقدم یا شرط یا کافی شرط و  $q$  را حکم یا تالی یا نتیجه یا جواب شرط یا جزای شرط یا لازم شرط می نامیم.
- \* نکته دوم اگر در ترکیب شرط را با کلماتی مانند مگر آنکه یا مگر آنکه هم می آورند، بطور مثال  
میان در امتحان قبول نشود مگر آنکه درس بخواند.

$p$   $q$

$p$  مگر آنکه  $q$  که این هم ارز گزاره  $p \rightarrow (\sim q)$  می باشد یعنی  
 به فارسی روان داریم اگر مینویسد خواند آنگاه در امتحان قبول نمی شود.

\* نکته سوم در گزاره شرط  $p \rightarrow q$  ، گزاره شرط  $p \rightarrow q$  را عکس گزاره  
 ( وارده گزاره ) و  $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$  را عکس نقیض گزاره و  $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$   
 را قرینه گزاره شرط می نامیم براحتی ثابت می شود  
 یا دارون گزاره شرط

عین گزاره شرط با عکس نقیض خود هم ارز است و  
 قرینه  $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \rightarrow (\sim q)$   
 با عکس گزاره هم ارز است.  
 اما گزاره شرط و عکس گزاره شرط در حالت مکرر دو گزاره مستقل هستند.  
 بطور مثال اگر امروز جمعه باشد آنگاه امروز تعطیل است  $\equiv$   
 اگر امروز تعطیل باشد آنگاه امروز جمعه نیست.

اما عکس گزاره چنین است اگر امروز تعطیل باشد آنگاه امروز جمعه است  
 که از گزاره اول مستقل است و صحیح نیست.  
 مثال اگر  $ABC$  یک مثلث متساوی الساقین باشد آنگاه میان و ارتفاع دارد در ضلع  
 سوم آن بر هم منطبقند.

عکس گزاره اگر در  $ABC$  میان و ارتفاع دارد در ضلع سوم یک باشد آنگاه مثلث  
 متساوی الساقین است.  
 این گزاره هم خودش و هم عکس آن صحیح اند.  
 در حالت مکرر گزاره شرط و عکس گزاره شرط از هم مستقلند و درستی یا نادرستی

لا نکته: چهار مورد، صورتهای دیگر بیان ترکیب شرطی

ترتیب شرطی  $p \rightarrow q$  به معنی اشغال زیر بیان می شود.

اگر  $p$  آنگاه  $q$  -  $p$  آنگاه  $q$  -  $p$  نتیجه در عدد  $q$ .

آنگاه  $q$  اگر  $p$  -  $q$  اگر  $p$ .

$q$  - شرط آنکه  $p$  -  $q$  در صورتیکه  $p$ .

$p$  فقط اگر  $q$  -  $p$  تنها اگر  $q$  - تنها اگر  $q$ ،  $p$ .

$p$  شرط کافی برای  $q$  است - شرط کافی برای  $q$  آنگاه  $p$ .

$q$  شرط لازم برای  $p$  است - شرط لازم برای  $p$  آنگاه  $q$ .

مثال: ترتیب شرطی زیر را به معنی اشغال مختلف بیان کنید.

اگر  $n$  زوج  $n = c$  مستحق پذیر باشد آنگاه  $n$  زوج است.

در این مقدار  
 $q$

$p$

مستحق پذیر آنگاه  $p$  مستحق

مستحق پذیر نتیجه در عدد  $p$  مستحق

آنگاه  $n = c$  زوج است اگر مستحق پذیر باشد.

که میوه است اگر مستحق پذیر باشد.

که میوه است اگر مستحق پذیر باشد.

که میوه است اگر مستحق پذیر باشد.

که مستحق پذیر است فقط اگر میوه است باشد. فقط اگر میوه است باشد، مستحق پذیر است.

مستحق پذیر شرط کافی برای  $p$  مستحق است.

شرط کافی برای  $p$  مستحق پذیر است.

مستحق شرط لازم برای مستحق پذیر است.

شرط لازم برای مستحق پذیر آنگاه مستحق پذیر است.

لا نکته: پنجم، صورتهای دیگر بیان ترکیب دو شرطی

ترتیب دو شرطی  $p \rightarrow q$  را به صورتهای زیر بیان می کنیم.

۱ اثر و تنها اثر ۱

۲ اثر و تنها اثر ۲

اثر ۳ آنگاه ۱ و برعکس

اثر ۱ آنگاه ۲ و برعکس

۳ شرط لازم، کافی برای ۱ است.

۱ شرط لازم، کافی برای ۲ است.

در تعاریف ریاضی اغلب گزاره‌ها در شکل  $P \rightarrow Q$  به کار می‌رود. بطور مثال

مقدار متساوی الاضلاع است اگر و تنها اگر سه ضلع آن با هم برابر باشند.

عدد طبیعی  $n$  اول است اگر و تنها اگر تنها از خود و ۱ و یک مقسوم علیه دیگر نداشته باشد.

مثال ۱ عبارتهای زیر را به فارسی روان (به صورت اثر - آنگاه - بیان کنید)

- شرط لازم برای درک عدم کامپیوتر، داشتن دانش کافی در ریاضی گسسته است.

- این برنامه اجرا می‌شود، تنها اگر، اشتباهی در تایپ آن موجود نباشد.

حل ۱  $10 \rightarrow 9$

۱ شرط لازم برای ۲ است یا شرط لازم برای ۲ آنگاه ۱.

شرط لازم برای درک عدم کامپیوتر، داشتن دانش کافی در ریاضی گسسته است.

۱ ۲

تبارین گزاره منطقی ملال (هم ارز) گزاره زیر است.

اثر عدم کامپیوتر را درک کنید آنگاه دانش کافی در ریاضی گسسته دارید.

$10 \rightarrow 9$

۱ تنها اثر ۱

این برنامه اجرا می‌شود، تنها اگر، اشتباهی در تایپ آن موجود نباشد.

۱

اثر این برنامه اجرا می‌شود آنگاه اشتباهی در تایپ آن موجود نیست.

- ۱- عکس و عکس نقیض و قرینه گزاره  $\neg (p \vee q)$  را بنویسید.
- الف اگر امروز برف بیاید، بیست فردا دایر است.
- ب اگر علی نرسد، در امتحان موفق می شود.
- ج اگر علی قلاس کند، دانشگاه یامرگز فنی و حرفه ای می رود.
- ۶ این کتاب خالی است، اسم این معنا است که این کتاب چیزی که مشکل نیست.
- ه اگر علی مقاله کند، در امتحان قبول است.
- و علی مقاله می کند اگر و تنها اگر وقت کافی داشته باشد.
- ۲- گزاره های زیر را به فارسی روان (اثر - آفتاب - ) بنویسید.
- الف برای رئیس جمهور شد، او کافی است و یا سقراط باشد.
- ب برای رئیس جمهور شد، او لازم است و یا سقراط باشد.
- ۵ شرط لازم برای درک علم کامپیوتر، داشتن دانش کافی در ریاضیات است.
- ۱ این برنامه اجرا خواهد شد، تنها اگر، استیفا می درآید (کردن) آن، موجود باشد.
- ۳ عدد طبیعی  $n$  اول است، تنها اگر بر خود  $n$  و یک قابل تقسیم باشد.
- ۱۶ تنها اگر خسته باشم، موفق می شوم.
- ۷ برای متقین بودم لازم است شغل مربع باشد.
- ۱۱ برای متقین بودم کافی است شغل مربع باشد.
- ۱۳ با این برنامه کامپیوتری من قبل از زمان، برای تنیس بازی کرد (بعد از ظهر)
- ۵ من لازم است.
- ۱۱ کافی است، طوبی پائین باشد، آفتاب بدرخشد تا امروز عصر تنیس بازی کنم.
- ج برای آنکه مریم بالاترین نمره را بگیرد لازم است در امتحان موفق شود.
- ج قبول در امتحان و حل تمرین عامل زیاده، کافی است که مریم بالاترین نمره را بگیرد.

Tautology  
counter  
probability

توتولوژی و تناقض و احتمال

ترانه ای مرکب که در همه حالات منطقی ممکن دارای ارزش درست (۲۵)  
باشد توتولوژی یا استو می نامیم و با حرف T نشان می دهیم مانند  
 $p \vee \sim p$  (قانون رد حالت سوم)

| $p$ | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ |
|-----|----------|-----------------|
| T   | F        | T               |
| F   | T        | T               |

یا ترانه  $(p \wedge \sim p) \rightarrow q$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $p \wedge \sim p$ | $(p \wedge \sim p) \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------------------|
| T   | T   | F        | F                 | T                                 |
| T   | F   | F        | F                 | T                                 |
| F   | T   | T        | F                 | T                                 |
| F   | F   | T        | F                 | T                                 |

| $p$ | $p \rightarrow p$ |
|-----|-------------------|
| T   | T                 |
| F   | T                 |

عبارتی در توتولوژی استون ارزشش ترانه فقط شامل TRUE  
می باشد مانند جدول بالا.

و اگر در همه حالات منطقی ممکن دارای ارزش نادرست باشد آن را تناقض  
یا دروغگو می نامیم و با حرف F نشان می دهیم. عبارتی نقیض و توتولوژی  
یک تناقض است. معلوم مال  $p \wedge \sim p$  (قانون عدم اجتماع نقیضین)

| $p$ | $\sim p$ | $p \wedge \sim p$ |
|-----|----------|-------------------|
| T   | F        | F                 |
| F   | T        | F                 |

ستون ارزشش این ترانه فقط شامل FALSE  
می باشد مانند جدول در بر و

و اگر ترانه ای نه توتولوژی و نه تناقض باشد آن را احتمال می نامیم و بین در  
برخی از حالات منطقی دارای ارزش T و در برخی از حالات دارای ارزش F می  
باشد.  $p \rightarrow \sim p$

| $p$ | $\sim p$ | $p \rightarrow \sim p$ |
|-----|----------|------------------------|
| T   | F        | F                      |
| F   | T        | T                      |

توضیح ۱

الف) ترانه شرطی یا در شرطی که توتولوژی باشد را استلزام منطقی یا قیاس می نامند  
و در این حالت ترانه شرطی  $p \rightarrow q$  را به صورت  $p \Rightarrow q$  و ترانه در شرطی  
 $p \leftrightarrow q$  را به صورت  $p \Leftrightarrow q$  نشان می دهیم.  
و واضح است که استلزام منطقی دو طرفه یعنی  $p \Leftrightarrow q$  معادل است با هم ارزی

$p \equiv q$  را به گونه بیشتر در مقام یک یا غیر استفاده می شود.

مثال از این است که از منطق معروف

$$\left. \begin{aligned} (p \wedge q) &\Rightarrow p \\ (p \wedge q) &\Rightarrow q \end{aligned} \right\} \text{ میانه تخصیص یا قانون احتیاج به } p \text{ و } q$$

قانون ادخال فاصل یا میانگین فعلی

$$[p \rightarrow q] \wedge p \Rightarrow q \quad \text{میانه استساین یا نتیجه گیری}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim p) \quad \text{میانه رفع یا میانه عکس}$$

$$\left. \begin{aligned} [p \vee q] \wedge (\sim p) &\Rightarrow q \\ [p \vee q] \wedge (\sim q) &\Rightarrow p \end{aligned} \right\} \text{ قانون رفع مؤلفه}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge [q \rightarrow r] \Rightarrow [p \rightarrow r] \quad \text{قانون قدس یا انتقال}$$

این قانون را می توان به هر تعداد متغیر از گزاره های شرطی دنبال هم تقسیم کرد.

$$[p_1 \rightarrow p_2] \wedge [p_2 \rightarrow p_3] \wedge \dots \wedge [p_{n-1} \rightarrow p_n] \Rightarrow [p_1 \rightarrow p_n]$$

$$[p \rightarrow r] \wedge [q \rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r] \quad \text{انبات به وسیله حالات}$$

$$\left. \begin{aligned} [p \rightarrow q] \wedge [r \rightarrow s] &\Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)] \\ [p \rightarrow q] \wedge [r \rightarrow s] &\Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)] \end{aligned} \right\} \text{ میانه دو وجهی}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge [r \rightarrow s] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)] \quad \text{برهان خلف}$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow c] \quad \text{میانه مفقود}$$

مثال از این است که گزاره های زیر را استر با منطق می شود.

$$p \wedge q \rightarrow p$$

$$p \wedge q \rightarrow p \equiv p \vee \sim (p \wedge q) \quad \text{معادل ترکیب شرطی}$$

$$\equiv p \vee [(\sim p) \vee (\sim q)] \quad \text{دوگان}$$

$$\equiv (p \vee \sim p) \vee \sim q \quad \text{شرکت پذیری}$$

$$\equiv t \vee \sim q \quad \text{در حالت دوم}$$

$$\equiv t \quad \text{قانون غلبه یا تسلیم طبق تعریف ترکیب مفقود}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) = A$$

تو تولو (بود) رابطه منطقی کمک توانی هم ارزش میسر است و هم کمک جدول ارزشی، در این حجم محاسبات از طریق توانی هم ارزش برای این مورد بسیار طولانی و زیاده است، روش جدول را ترجیح می دهیم.

| p | q | r | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow r$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ | $p \rightarrow r$ | A |
|---|---|---|-------------------|-------------------|----------------------------------------------|-------------------|---|
| T | T | T | T                 | T                 | T                                            | T                 | T |
| T | T | F | T                 | F                 | F                                            | F                 | T |
| T | F | T | F                 | T                 | F                                            | T                 | T |
| T | F | F | F                 | T                 | F                                            | T                 | T |
| F | T | T | T                 | T                 | T                                            | T                 | T |
| F | T | F | T                 | F                 | F                                            | T                 | T |
| F | F | T | T                 | T                 | T                                            | T                 | T |
| F | F | F | T                 | T                 | T                                            | T                 | T |

در جدول بالا می بینیم که ستون مربوط به ترکیب A کاملاً T می باشد پس A یک تو تولو (بود) است.

توضیح: مانند  $p \rightarrow q$

الف) خوب است بدانیم که تو تولو (بود) یک گزاره شرطی الزامی - معنی صحیح بود (p نیست و یا صحیح بود) q،

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| T | T | T                 |
| T | F | F                 |
| F | T | T                 |
| F | F | T                 |

در جدول فوق می بینیم که در سه حالت گزاره  $p \rightarrow q$  صحیح است و در یک حالت (تو) نادرست است. معنی حالات q صحیح بوده یا در همه حالات p صحیح بوده است.

بنابرین بطور مثال در گزاره شرطی زیر،

صحت گزاره بالا، الزاماً نتیجه نمی دهد که در مقدار x حاشی دارد مثلاً اگر  $y \leq 3$  و مثلاً  $y = 4$  گزاره بنابر انتقاع مقدم صحیح است و مقدار x ملزم نیست.

منظور از این توضیح این است که در ریاضیات، اکثر گزاره ها شرطی می باشند پس لازم است که با کار کردن چنین گزاره های بطور دقیق آشنا باشیم.

ب. اکثر مقایسه‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$   
 و این یک حکم یا اثبات یک مقیاس، در واقع این معنی است که ثابت کنیم گزاره فوق  
 یک توتولوژی است که در آن  $p_i$  ها فرض یا مقدمات و  $q$  را حکم یا نتیجه و این  
 فرآیند را یک استنتاج می‌نامیم.

ج. از آنجا که در کامپیوتر یک بیت فاقد ارزش معنی یک (در مبانی 2)  
 است و گزاره نیز دارای دو ارزش درست یا نادرست می‌باشد، بنابراین می‌توان  
 عملگرهای بیت کامپیوتر را با رابط‌های منطقی تغییر کرد به این ترتیب که عدد 1  
 نمایش ارزش درست یا TRUE و عدد 0 نمایش ارزش نادرست یا FALSE  
 باشد.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \oplus q$ | $p \downarrow q$ | $p \uparrow q$ | $p$ | $\sim p$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|--------------|------------------|----------------|-----|----------|
| T   | T   | T            | T          | T                 | T                     | F            | F                | F              | T   | F        |
| T   | F   | F            | T          | F                 | F                     | T            | F                | T              | F   | T        |
| F   | T   | F            | T          | T                 | F                     | T            | F                | T              | T   | F        |
| F   | F   | F            | F          | T                 | T                     | F            | T                | T              | T   | T        |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \oplus q$ | $p \downarrow q$ | $p \uparrow q$ | $p$ | $\sim p$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|--------------|------------------|----------------|-----|----------|
| 1   | 1   | 1            | 1          | 1                 | 1                     | 0            | 0                | 1              | 1   | 0        |
| 1   | 0   | 0            | 1          | 0                 | 0                     | 1            | 0                | 1              | 0   | 1        |
| 0   | 1   | 0            | 1          | 1                 | 0                     | 1            | 0                | 1              | 1   | 0        |
| 0   | 0   | 0            | 0          | 1                 | 1                     | 0            | 1                | 1              | 0   | 1        |

بنابراین اکثر مقدار گزاره‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد و رابط‌های منطقی  
 و ارزش‌های رابط‌های کامپیوتر تعریف کرد (طبق جدول اخیر) و این اعمال را با  
 محاسبات کامپیوتری انجام داد بطور مثال اگر  $2^{20}$  گزاره متعلق در ترکیب  
 موجود باشد، جدول ارزشی دقیقاً به  $2^{20}$  سطری می‌باشد.  $2^{20}$  تقریباً 1.048576 (یک عدد بزرگ)  
 سطر احتیاج دارد.

۱. تعریف پارادوکس paradox  
 بعضی از ترکیبات منطقی که شکل آن‌ها با عرف مطابقت ندارد را پارادوکس می‌نامیم.  
 مثال: اگر خورشید بناید، آنگاه سبزه است یا اگر سبزه است آنگاه 2 یک عدد فرد  
 است.

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (q \vee \sim p) \vee (r \vee \sim q) \\
 &\equiv (q \vee \sim q) \vee (r \vee \sim p) \\
 &\equiv t \vee (r \vee \sim p) \\
 &\equiv t
 \end{aligned}$$

معادل ترکیب شرطی  
حاجب این دو شرکت پذیر  
قانون در حالت دوم  
تعریف ترکیب مفصل (قانون علی یا سلم)  
تلق

در متن فوق گزاره ۲ هر گزاره ای می تواند باشد و تأیید در این  
ترکیب گزاره پس اگر گویند معادل گفتن این دو گزاره یعنی  $p \rightarrow q$  و  
 $q \rightarrow r$  گزاره ۲ را نتیجه بگیرد، این ترکیب را با را دو کس می گویند.  
بنابراین تنها سلسله عبارات این است که در این درس و در علم جا، در علم همین  
عبارات منطقی وارد نشویم.  
> به گفت قانون عدم همین معادل ترکیب دو شرطی برای اثبات هم ارزها می  
 $p \equiv q \equiv r$  می توان ۳ روش زیر عمل کرد

معین اثبات این هم ارز را در ۳ مرحله  
بدعم  
 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)$

می توانیم که در هر مرحله با یک در همین متن را بنویس خواننده شده یا دور  
شد را عقل با هم امتحان عنوان قواعد استنتاج می شناسیم در این بررسی  
هم اینها را استدلال عام منطقی آنها را کار می گیریم.

لیست کامل این قوانین عبارت است از

$$\begin{aligned}
 \sim(\sim p) &\equiv p && \text{قانون نفی مضاعف} \\
 p \wedge q &\equiv q \wedge p && \text{قانون جابجایی} \\
 p \vee q &\equiv q \vee p && \text{قانون جابجایی} \\
 (p \wedge q) \wedge r &\equiv p \wedge (q \wedge r) && \text{قانون دمج} \\
 (p \vee q) \vee r &\equiv p \vee (q \vee r) && \text{قانون دمج} \\
 \sim(p \wedge q) &\equiv (\sim p) \vee (\sim q) && \text{قانون معادل ترکیب شرطی} \\
 \sim(p \vee q) &\equiv (\sim p) \wedge (\sim q) && \text{قانون عکس نفی ترکیب شرطی} \\
 p \rightarrow q &\equiv q \vee \sim p && \text{قانون معادل ترکیب شرطی} \\
 p \rightarrow q &\equiv (\sim q) \rightarrow (\sim p) && \text{قانون معادل ترکیب دو شرطی} \\
 p \leftrightarrow q &\equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim q) && \text{قانون معادل ترکیب دو شرطی} \\
 p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) && \text{قانون معادل ترکیب دو شرطی} \\
 p \leftrightarrow q &\equiv (p \leftrightarrow p) && \text{قانون خود توانی} \\
 p &\equiv p \wedge p \\
 p &\equiv p \vee p
 \end{aligned}$$

قانون نفی مضاعف  
قانون جابجایی  
قانون دمج  
قانون معادل ترکیب شرطی  
قانون عکس نفی ترکیب شرطی  
قانون معادل ترکیب دو شرطی  
قانون معادل ترکیب دو شرطی  
قانون خود توانی

(۳۰)

$$\left. \begin{aligned} p &\equiv p \wedge (p \vee q) \\ p &\equiv p \vee (p \wedge q) \end{aligned} \right\} \text{قانون جذب}$$

$$\left. \begin{aligned} p \vee \sim p &\equiv t \\ p \wedge \sim p &\equiv c \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{قانون مقسم} \\ &\text{قانون رد حالت سوم} \\ &\text{عدم اجتماع نقیضین} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} p \wedge t &\equiv p \\ p \vee c &\equiv p \end{aligned} \right\} \text{قانون همانی}$$

$$\left. \begin{aligned} p \vee t &\equiv t \\ p \wedge c &\equiv c \end{aligned} \right\} \text{قانون غلبه یا سلطه}$$

$$p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow c \quad \text{برهان خلف}$$

$$\left. \begin{aligned} (p \wedge q) &\Rightarrow p \\ (p \wedge q) &\Rightarrow q \end{aligned} \right\} \text{قانون اختصار}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \quad \begin{aligned} &\text{قانون قیاس استساین یا} \\ &\text{انتزاع یا نتیجه گیری} \end{aligned}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p \quad \text{قانون قیاس دفع یا قیاس تکفیر}$$

$$p \Rightarrow (p \vee q) \quad \text{قانون قیاس فعلی یا ادخال خاص}$$

$$\left. \begin{aligned} [(p \vee q) \wedge \sim p] &\Rightarrow q \\ [(p \vee q) \wedge \sim q] &\Rightarrow p \end{aligned} \right\} \text{قانون دفع مؤلفه}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r) \quad \text{قانون سلسله}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \vee r) \rightarrow q] \quad \text{قانون جمع حالات یا جمع حالات}$$

$$\left. \begin{aligned} [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] &\Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)] \\ [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] &\Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)] \end{aligned} \right\} \text{قانون رد و ردی}$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q) \quad \text{قانون معکوس}$$

- ۱- صیغته تو تولوژس مده ایفته شه را ایضا کینه  
 (قانون اختصار - قیاس استثنای - قیاس دفع - قیاس عقل - دفع مؤلفه -  
 تدوین - ایضا - وسیع حالات - قیاس دو وجهی)
- ۲- اثبات کینه گزاره مابین زیر تو تولوژس اند

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$$

$$[(p \vee q) \wedge \sim (\sim p \wedge (\sim q \vee \sim r))] \vee [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r)]$$

$$[\sim (p \wedge q)] \rightarrow ((\sim p) \vee ((\sim p \vee q))) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

- ۳- اثبات کینه اثر  
 [p<sub>1</sub> ∧ p<sub>2</sub> ∧ ... ∧ p<sub>n</sub> ∧ p] → q  
 باشد آنگاه ترکیب شرط زیر نیز تو تولوژس است.

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n] \rightarrow (p \rightarrow q)$$

- ۴- یقین کینه کدامیک از موارد زیر تو تولوژس است.

$$(p \vee q) \rightarrow p \quad / \quad (p \vee \sim q) \rightarrow (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

$$/ p \rightarrow [(q \wedge r) \rightarrow (s \vee t)] \} \rightarrow \{ p \vee [(q \wedge r) \rightarrow s] \}$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad / \quad [p \rightarrow (q \wedge r) \rightarrow (s \vee t)] \}$$

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

$$[(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

$$(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

- ۵- یقین کینه کدامیک از قواعد استنتاج در موارد زیر بکار رفته است.

الف: علی رشته ریاضی است، بنابراین علی رشته ریاضی است یا رشته کامپیوتر می خواند  
 ب: علی رشته ریاضی است و هم رشته کامپیوتر می خواند، بنابراین علی کامپیوتر می خواند  
 ج: اثر امروز باران زیاد است، استخر تعطیل می شود، هوا بارانی است، بنابراین استخر تعطیل است.

ح: کانگوروها در استرالیا زندگی می کنند و حیوانات کیسه دار هستند، بنابراین کانگوروها کیسه دارند.

خ: امروز باران هوا کمتر از ۴۰ است و یا آلودگی هوا زیاد است، امروز

دما هو اکثر از 4 بود پس آلودگی هوا زیاد است.

ج اعلی شایر ماهر است، اثر علی شایر ماهر باشد، آفتاب می تواند بجات

عزیز شود، بنابرین علی می تواند بجات عزیز باشد.

۶ اثر مریم شایر سب درون مقرین عایشی وقت بگذارد، آفتاب می تواند هوای آنها

را بدهد، اثر مریم هوای علم ترین ها را بدهد آفتاب این درس را به خوبی

یاد می دهد، اثر مریم شایر سب درون مقرین ها وقت بگذارد، این درس را

به خوبی فرمیده است.

۷- یک نیتیم برای مجموعه جملات زیر بنویسید.

- همه صریحها، متکلیف هستند.

- هم متکلیف ها، متوازن الاضلاع هستند.

- هم متوازن الاضلاع، چهار ضلعی اند.

۷- تعیین کنید کدامیک از گزاره های زیر استقام منطقی است.

$$p \rightarrow q / p \leftrightarrow q / p \rightarrow p / p \rightarrow \sim p / (p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$[\sim(p \rightarrow q)] \rightarrow (\sim q) / (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) / \sim[\sim(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)]$$

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$$

۸- ثابت کنید سه گزاره زیر هم ارزند.

-  $n$  یک عدد حقیقی گسسته است.

-  $2n + 3$  یک عدد حقیقی گسسته است.

-  $\frac{n}{2}$  یک عدد حقیقی گسسته است.

# برهان درستی

برای رد کردن یک گزاره کافراست که متضاد آن نقض یابد و بریم بطور مثال  
اگر گزاره این باشد هر عدد طبیعی فا بیش از ۱ مجموع مربعات دو عدد  
صحیح دارد پس برای  $n \in \mathbb{N}$  اعداد صحیح  $a$  و  $b$  موجودند  
بطوریکه  $n = a^2 + b^2$  کافراست عدد طبیعی  $n=3$  را مثال  
بریم که به صورت مجموع مربعات هیچ دو عدد صحیح قابل نمایش نیست  
اما برای اثبات یک حکم،

اثبات یک حکم در واقع تأیید این مطلب است که گزاره ای نتیجه گزاره ای دیگر  
در تمام فرض است و منطوق حکم برقرار است یا حکم صحیح است هرگاه  
ترکیب عطف مفروضات نتیجه را به دست می دهد.

برای اثبات درستی حکم، معمولاً از سه روش استفاده می کنیم.

الف ابرهان مستقیم یا استفاده از استنتاج

ب ابرهان غیرمستقیم یا ابرهان خلف

ج استقرای ریاضی

روش اول ابرهان مستقیم یا استنتاج

فرضها  $p_1, p_2, \dots, p_n$  و حکم  $q$  یا به عبارتی

باید ثابت کنیم گزاره فوق  
یک توتولوژی یا استلواست  
$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$
  
حکم مجموع فرضها

برای اثبات توتولوژی  $\Rightarrow$  یک روش استفاده از جدول ارزش  
می باشد اما آنجا که تعداد گزاره ها منقول ممکن است زیاد باشد  
در این صورت تعداد سطرها نیز افزایش می یابد، بطور مثال اگر گزاره  
تعداد داشته باشیم  $2^4 = 16$  سطر نیاز است، بنابراین برای  
برعکس از این حجم محاسبات، اثبات توتولوژی بودن را باید با قواعد

مثال ۱ با ارائه دلیل ثابت کنید استنتاج زیر یک استنتاج منطقی است  
 عبارتین ثابت کنید مجموعه فرضیه‌ها زیر حکم را نتیجه می‌دهد.

- اگر اتومبیل با سرعت خیلی زیاد حرکت می‌کرد یا اتومبیل از سرعت  
 در حرکت آفتاب حسن معقور نبود.

- اگر اتومبیل از سرعت خیلی زیاد حرکت می‌کرد، حسن دروغ می‌گفت.

- حسن معقور نبود.

پس حسن دروغ می‌گفت.

حل ۱ اگر گزاره‌ها مستقل را نام‌گذاری کنیم

اتومبیل با سرعت خیلی زیاد حرکت می‌کرد ۱ p

اتومبیل از سرعت خیلی زیاد حرکت می‌کرد ۱ q

حسن معقور نبود ۱ r

حسن دروغ می‌گفت ۱ s

Hypothesis: فرض

Deduction: حکم

پس فرضیه‌ها حکم را با مفاد ریاضی چنین می‌نویسیم

$$H_1: (p \vee q) \rightarrow r$$

$$H_2: (\sim q) \rightarrow s$$

$$H_3: \sim r$$

$$D: s$$

$$L_1: (p \vee q) \rightarrow r$$

$$L_2: (\sim q) \rightarrow s$$

$$L_3: \sim r$$

$$L_4: \sim (p \vee q) \text{ (منفی)}$$

$$L_5: (\sim p) \wedge (\sim q)$$

$$L_6: \sim q$$

$$D = L_7: s$$

مثال ۱ احمدی گوید، اگر درس ریاضی گسسته را ثبت ناکنم و بطور جدی  
 آن را مطالعه کنم، نمره خوبی از این درس خواهم گرفت.

- اگر خبره خوبی از این درس بگیرم، می توانم در نفع سال بعدی درس مدار را ثبت نام کنم.

- اگر چه او درس گسسته را ثبت نام کرده بود، اما در ترم بعدی درس مدار را نتوانست ثبت نام کند.

پس لابد، درس گسسته را بطور جدی مطالعه نموده بود.

به کمک قواعد استنتاج درستی برهان فوق را تأیید کنید.

حل: اگر گزاره  $H_1$  مبنای منقول بکار رفته در متن فوق را نام گذاری کنیم، درس گسسته را ثبت نام کنیم؛  $p$

" بطور جدی مطالعه کنیم  $q$

خبره خوبی از این درس بگیرم  $r$

درس مدار را ثبت نام کنم در ترم بعدی:  $s$

$H_1$  فرض  $L_1: (p \wedge q) \rightarrow r$

$H_2$  "  $L_2: r \rightarrow s$

$H_3$  "  $L_3: p \wedge \sim s$

$L_4$  و اختصار  $L_4: \sim s$

$L_2$  و  $L_4$  تیاکس دفع  $L_5: \sim r$

$L_1$  و  $L_5$  تیاکس دفع  $L_6: (p \wedge q)$

$L_6$  و دموگان  $L_7: (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$L_3$  و اختصار  $L_8: p$

$L_8$  و نفی مضاعف  $L_9: (\sim p)$

$L_7$  و  $L_9$  در رفع مؤلفه  $D = L_{10}: q$

$H_1: (p \wedge q) \rightarrow r$

$H_2: r \rightarrow s$

$H_3: p \wedge \sim s$

$D: q$

البتّه حدیث بالا را می توانستیم به صورت زیر هم انجام دهیم.

|                                   |                            |
|-----------------------------------|----------------------------|
| $L_1, (p \wedge q) \rightarrow r$ | $H_1$ فرض                  |
| $L_2, r \rightarrow s$            | $H_2$ //                   |
| $L_3, p \wedge \sim s$            | $H_3$ //                   |
| $L_4, (p \wedge q) \rightarrow s$ | $L_1$ و $L_2$ از قاعده     |
| $L_5, \sim s$                     | $L_3$ و اختصار             |
| $L_6, \sim (p \wedge q)$          | $L_4$ و $L_5$ و تباين دريغ |
| $L_7, (\sim p) \vee (\sim q)$     | $L_6$ و دموگان             |
| $L_8, p$                          | $L_7$ و اختصار             |
| $L_9, \sim (\sim p)$              | $L_8$ و نفی منافی          |
| $D = L_{10}: \sim q$              | $L_7$ و $L_9$ و رفع مؤلفه  |

در روش برهان مستقیم یا استنتاج، حکم  $D$  را نتیجه منطقی فرضها  $H_1$  و  $H_2$  و ... و  $H_n$  می‌گویند (توانا) لیسیت (فهرستی) از حکم‌ها  $H_1$  و  $H_2$  و ... و  $H_{n-1}$  و  $H_n = D$  نتیجه‌گیری کرده‌اند. در مثال قبل، بطوریکه هر یک از این‌ها یا یکی از فرضها  $H_1$  و  $H_2$  و ... و  $H_n$  باشد و یا توسط قوانین منطقی (قواعد استنتاج) از حکم‌ها  $H_1$  و  $H_2$  و ... و  $H_{n-1}$  نتیجه‌گیری شده باشد، در این صورت این فهرست را یک برهان برای حکم  $D$  و هر یک از این‌ها را یک مرحله از بدیهه نام می‌بریم. به عبارتی در روش برهان مستقیم، اثبات ریاضی حکم، با مقدم فرضها آغاز می‌شود و با عبور از مراحل مختلف که هر کدام توسط یکی از قواعد استنتاج نتیجه می‌شود، به تالی حکم می‌رسیم.

مثال: ثابت کنید؟  $[ (p \rightarrow q) \wedge [ (\sim r) \rightarrow \sim q ] \wedge (\sim r) ] \Rightarrow \sim p$

حل ۱

|                                      |               |
|--------------------------------------|---------------|
| $H_1: p \rightarrow q$               | $H_3: \sim r$ |
| $H_2: (\sim r) \rightarrow (\sim q)$ |               |

(۳۷)

$$L_1: p \rightarrow q$$

فرض  $H_1$ 

$$L_2: (\sim r) \rightarrow (\sim q)$$

 $H_2$  //

$$L_3: \sim r$$

 $H_3$  //

$$L_4: \sim q$$

از  $L_2$  و  $L_3$  با تئوری استنتاج

$$D = L_5: \sim p$$

از  $L_4$  و  $L_5$  با تئوری دفع

روش دوم (برهان خلف)

ما فرض می‌کنیم که این مجموعه فرضیات (فرضیات) درست است و این مجموعه را به عنوان مجموعه فرضیات می‌نامیم.

از این مجموعه فرضیات (برهان خلف) در روش دوم، فرض می‌کنیم که این مجموعه فرضیات درست است و این مجموعه را به عنوان مجموعه فرضیات می‌نامیم. (قول مدعی) را اضافه کرده و سپس به کمک برهان خلف، مستقیماً استنتاج دروغی (اول) می‌کنیم. یک تناقض دست پیدا کنیم. عبارتی برای اثبات حکم زیر

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

می‌توانیم بر عقل می‌کنیم:

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \wedge \sim q] \rightarrow C$$

(تناقض)

البته که در نیز برهان خلف را به صورت زیر هم تعبیر می‌کنند.

$$p \rightarrow q \equiv (\sim q) \rightarrow (\sim p)$$

یعنی جایی که اثبات گزاره، یکس نفی است (اثبات می‌کنند).

مثال: به کمک برهان خلف، صحت استنتاج زیر را اثبات کنید.

$$H_1: (p \vee r) \rightarrow (p \wedge q)$$

$$H_2: \sim p$$

$$D: \sim r$$

فرض  $H_1$ 

$$L_1: (p \vee r) \rightarrow (p \wedge q)$$

 $H_2$  //

$$L_2: \sim p$$

$$L_3: \sim (\sim r)$$

خلف یا قول مدعی

$$L_4: r$$

از  $L_3$  و تئوری مضاعف

$$L_5: p \vee r$$

از  $L_4$  و تئوری فاعلی

$$L_6: p \wedge q$$

از  $L_5$  و  $L_6$  با تئوری استنتاج

$$L_7: p$$

از  $L_6$  و احتیاط

$$L_8 = C: p \wedge \sim p$$

از  $L_7$  و  $L_8$  با تئوری تضاد

تناقض

حل ۱

این مسئله با توجه به صورت سوال به کمک روش برهان خلف حل شد. ۳۸

برهان مستقیم داریم:  $H_1$  فرض

$$L_1: (p \vee r) \rightarrow (p \wedge q)$$

$$L_2: \sim p$$

$H_2$  یا، عکس نقیض

$$L_3: \sim (p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee r)$$

$$L_4: [(\sim p) \wedge (\sim r)] \rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim r)]$$

$$L_5: (\sim p) \vee (\sim q)$$

ادخال حاصل

$$L_6: (\sim p) \wedge (\sim r)$$

$L_4$  و  $L_5$  و قیاس استنتاج

$$D=L_7: \sim r$$

$L_6$  و قانون انقیاد

حاصل است که با استفاده از برهان خلف با فرضها شروع می شود و به حکم یا تناقض ختم می شود اما مقدار در احوال برهان و همین طور قواعد نگارنده به طبع افراد مبتدی دارد و برای فهم لزوماً آسان نیست.

سوال اما استناد از برهان خلف و همچنین به کمک برهان مستقیم ثابت کنید اگر  $n$  یک عدد طبیعی دلخواه باشد و  $n^3+5$  یک عدد فرد، آنگاه  $n$  یک عدد زوج است.

حل: راه اول: برهان مستقیم

$$n^3+5 \text{ فرد است} \Rightarrow n \text{ زوج است}$$

$$n^3+5 \text{ فرد است} \Rightarrow n^3 \text{ فرد است} \Rightarrow n \text{ فرد است}$$

$$n^3+5=2K+1 \Rightarrow n^3=2K-4 \Rightarrow n \text{ زوج است}$$

راه دوم: برهان خلف

تناقض  $\Rightarrow (n \text{ زوج است}) \sim (n^3+5 \text{ فرد است})$   
اگر  $n$  زوج باشد پس یک عدد فرد است و غلطی صورت می گیرد.  
 $n=2K+1 \Rightarrow n \text{ زوج نیست}$

$$\Rightarrow n^3+5=(2K+1)^3+5=8K^3+12K^2+6K+6$$

۳۹

$\Rightarrow n^3 + 5$  زوج است

تأیید زیر را طبق فرض، مرد بود.

مثال ۱ - گفت برعکس خلف ثابت کنید اگر ۲۲ روز متناوب از یک سال خورشیدی را انتخاب کنیم، دستکم ۴ روز این ۲۲ روز یک روز تکرار هفته است.

حل ۱ - فرض خلف اگر چنین باشد پس هر روز هفته حداقل یک بار تکرار شده است یعنی بین حداقل یک بار و یکشنبه حداقل یک بار و جمعه حداقل یک بار که ۷ شود حداقل یک ۳×۷ یعنی ۲۱ روز و این خلاف فرض است زیرا ۲۲ روز متناوب انتخاب شده بود.

الته مثال ۲ - گفت اصل لانه کوچکتر قابل حل بود زیرا  $22 = 3 \times 7 + 1$  و دستکم یکی از روزها هفته بیش از یک بار تکرار می شود یعنی حداقل ۴ مرتبه.

توضیح ۱ استدلال غلط

استدلال غلط ۲ استدلال که برای بعضی از حالات عدم مقدمات (فرضها) راست و در حکم غلط باشد.

مثال ۳ اگر عل درسی ریاضی را خوب بخواند، پسرش برای او دو وجه خدای مراد - بهر عل برای او دو وجه خدای عزیزه است. بنابراین عل درسی ریاضی را خوب مطالعه کرده است.

عل درسی ریاضی را خوب بخواند  $p$

بهر عل برای او دو وجه خدای مراد  $q$

$$\begin{array}{l} H_1 \quad p \rightarrow q \\ H_2 \quad p \\ \hline D \quad \therefore p \end{array}$$

در مثال ۳ که ما در نظر گرفتیم ترکیب  $\frac{p}{F} \mid \frac{q}{T}$

فرضها  $H_1$  و  $H_2$  هر دو صحیح اند در حکم صحیح نیست،

چنین مثال را یک استدلال غلط یا یک استنتاج نامعتبر می نامیم

بنابراین ما می بیند استنتاج چنین مطرح می شود که تحقیق کنید آیا این استنتاج معتبر است یا نه. در این صورت هر دو حالت ممکن است بین

استنتاج معتبر نیست  $\Rightarrow$  توتولوژی است  $1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$

استنتاج معتبر نیست  $\Rightarrow$  توتولوژی نیست  $1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$  - بنابراین یک استدلال غلط است.

در حل چنین مسائل بررسی می‌کنیم آیا ترکیب از گزاره‌ها مستقل موجود در (۴) است و وجود دارد بطوریکه تمام فرضها صحیح و در حکم غلط باشد، اگر این ترکیب یافته شود در این صورت با ارائه آن می‌توان گفت که این استنتاج معتبر نیست یا یک استدلال غلط است و یا عبارتی این مجموعه فرضها لزوماً حکم  $q$  را نتیجه نمی‌دهد. و اگر چنین ترکیب موجود نبود یعنی به شاقق رسیدیم به عبارتی

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n] \rightarrow q \text{ شاقق}$$

این همان برعکس خلف است و نتیجه می‌دهد که نتیجه منطقی فرضها  $p_1$  تا  $p_n$  است و یا عبارتی استنتاج معتبر است.

سوال ۱۵ نفر A و B و C و D و E با هم در یک سایت در حال گفتگو هستند.  
 با توجه به اطلاعات زیر کدامیک از این ۵ نفر به طور یقین در حال گفتگو هستند

- A یا B یا هر دو در حال گفتگو اند.
- C یا D در هر دو با هم در حال ...
- اگر E در حال گفتگو باشد، نیز ...
- A و D یا هر دو یا هیچکدام در حال گفتگو نیستند.
- اگر B در حال گفتگو باشد آنگاه A و E نیز در حال گفتگو هستند.

حل: اثر A در حال گفتگو است یا نه را به A و B در حال گفتگو است یا نه را B در ...  
 و به طور مشابه E در حال گفتگو است یا نه را E (نشان دهیم) در این صورت

$H_1: A \vee B$

$H_2: (C \vee D) \wedge \sim (C \wedge D)$

$H_3: E \rightarrow C$

$H_4: (A \wedge D) \vee ((\sim A) \wedge (\sim D))$

$H_5: B \rightarrow (A \wedge E)$

در واقع سوال این است که کدامیک از استنتاج‌ها زیر معتبر است؟

|                                                                 |   |
|-----------------------------------------------------------------|---|
| $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \rightarrow A$ | ① |
| " $\rightarrow B$                                               | ② |
| " $\rightarrow C$                                               | ③ |
| " $\rightarrow D$                                               | ④ |
| " $\rightarrow E$                                               | ⑤ |

فرض می‌کنیم A در حال گفتگو نباشد یا به عبارتی A نادرست باشد، بنابراین

$H_1$  رفع مؤلفه

$\rightarrow B$  صحیح است

$H_5$  قیاس استثنایی

$\rightarrow A \wedge E$

$\Rightarrow$ 

|   |   |
|---|---|
| A | B |
| F | T |

 $\Rightarrow$

اصطفا

$\Rightarrow A$  صحیح است  $\Rightarrow \#$

بنابراین اثر A صحیح باشد پس تا قفس موجود می‌آید و بنابراین هرگاه خلف پس A صحیح است یعنی A در حال گفتگو است پس D معتبر است.

حال با فرض آنکه A صحیح است، به سراغ B می‌رویم اثر B علاوه بر ...

$\Rightarrow$ 

|   |   |
|---|---|
| A | B |
| T | F |

 $\Rightarrow H_1$  صحیح است

$\Rightarrow$ 

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | D |
| T | F | T |

 $\Rightarrow$

$H_5$  صحیح است

$\Rightarrow$ 

|   |   |
|---|---|
| A | B |
| T | F |

 $\Rightarrow$

$H_4$  صحیح است

$\Rightarrow$ 

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | D |
| T | F | T |

 $\Rightarrow$

(۴۲)  $D \xrightarrow{H_2} [C \text{ غلط است}] \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} A & B & D & C \\ \hline T & F & T & F \end{array}$

$C \xrightarrow{H_3} [E \text{ غلط است}]$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & D & E \\ \hline T & F & F & T & F \end{array}$$

بین با ترکیب و جدول

می تواند هر دو فرض

مفصّل باشد اول B و C، E میگوید مفصّل نباشند، بنابراین این دو فرض میگوید از B و C، E، انتیسم نوردهن یعنی ⑤، ⑥، ⑦ نامعتبر است و دلتا به D، انتیسم به عدد

بنابرین این فرض از برای D تکراری کنیم.

اگر D غلط باشد چون A مفصّل است، بنابراین  $H_4$  یا  $A \sim$  درست باشد یعنی A غلط باشد که این تناقض است بنابراین D نمی تواند غلط باشد مطابق صفت اول D هم باید نتیجه منطقی فرضها را باشد بنابراین دو استنتاج زیر معتبر است یعنی ⑧ و ⑨

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \Rightarrow A$$

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \Rightarrow D$$

اما به استنتاج زیر نامعتبر است یعنی ⑤، ⑥، ⑦ استدلال غلط است.

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \Rightarrow B$$

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \Rightarrow C$$

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \Rightarrow E$$

مثال ۱ با فرض آنکه A و B و C و D و E، 5 نفر باشند و فرض کنیم

- اگر A سبک را عک کرده باشد، B نیز سبک را عک کرده است

- اگر D " " C نمی تواند عکس باشد.

- اگر E " " C نیز عکس را عکس برای سبک است.

- حداقل یکی از دو شخص B و D، سبک را عکس کرده است.

با توجه به شواهد بالا کدامیک از اشخاص A، B، C، D و E

قطعا یک عکس را عکس خواهد نمود.

حل با فرض آنکه اثر A را همگ کرده است و اثر B را همگ کرده است  
 اثر E را همگ کرده است و اثر E را همگ کرده است

$$\begin{aligned} H_1 &: A \rightarrow B \\ H_2 &: D \rightarrow \sim C \\ H_3 &: E \rightarrow C \\ H_4 &: B \vee D \end{aligned}$$

این سوال در واقع این معناست که کدام یک از استنتاجها درست است.

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \Rightarrow A \quad ①$$

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \Rightarrow B$$

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \Rightarrow C$$

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \Rightarrow D$$

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \Rightarrow E$$

ابتدا با A آغاز می کنیم اثر A غلط است پس فرض  $H_1$  بنا بر فرض مقدم  
 صحیح است و اثر B هم غلط است بنا بر فرض  $H_4$  صحیح است D صحیح است

و ① نامعتبر است

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | D |
| F | F | T |

صحت D صحیح است  $H_4$  رفع مؤلفه

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | D | C |
| F | F | T | F |

صحت C غلط است  $H_2$  قیاس استثنای

صحت D صحیح است  $H_3$  قیاس دفع

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| F | F | F | T | F |

بنا بر این با ترکیب بالا می توانه فرض 4 فرض صحیح را A, B, C, E صحت  
 غلط باشند پس هیچکدام از A, B, C, E نتیجه قطعی این فرض نمی باشند  
 پس D نتیجه این فرض است  
 پس تنها هم این فرض است که غلط بود D تکرار می کنیم

$\frac{D}{F} \mid \frac{B}{T}$   $\xrightarrow{H_4}$  B صحیح است  $\rightarrow$  D غلط است  
 (۴۴)

$H_2$  صحیح است  $\rightarrow$  نفعی مقدار  
 پس اگر A غلط باشد گزاره  $H_1$  هم غلط باشد و اگر A صحیح است و اگر E و C غلط باشند گزاره  $H_3$  نیز صحیح است بنابراین با ترکیب زیر

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| F | T | F | F | F |

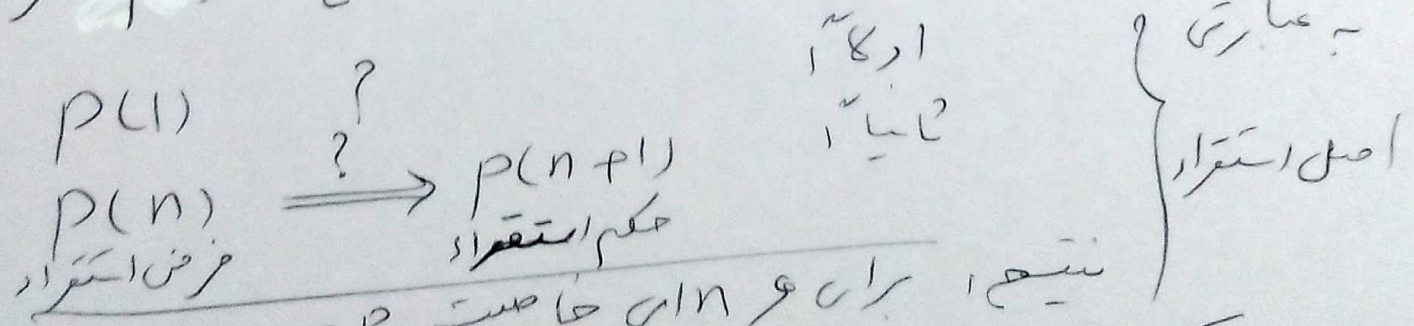
هر فرض صحیح است به عبارت D نیز نتیجه قائل این ۴ فرض غلط باشد پس هیچکدام از استنتاجها صحت قبل محسوس نیست.

### روش سوم اصول استقرای ریاضی

در روش استقرای ریاضی به کمک اصل استقرای اثبات خاصیت یک تابع گزاره‌ای را بر اعداد طبیعی با استفاده از اثبات اشکله اعداد طبیعی در خاصیت  $P$  صدق می‌کنند و یا به عبارت دیگر برای هر  $n \in \mathbb{N}$  خاصیت  $P$  برای  $n$  صحیح است یعنی  $P(n)$  به روش زیر عمل می‌کنیم.

اولاً ثابت کنیم خاصیت  $P$  برای عدد طبیعی  $n=1$  صحیح است یا به عبارت دیگر  $P(1)$  صحیح است.

ثانیاً فرض می‌کنیم خاصیت  $P$  برای  $n$  صحیح باشد (فرض استقرای) ثابت می‌کنیم خاصیت  $P$  برای  $n+1$  نیز صحیح است (حکم استقرای)



نتیجه: برای هر  $n$  این خاصیت  $P$  صحیح است. واضح است که این روش زمانی کار می‌رود که تغییر هر عدد طبیعی یک حالت موجود باشد یعنی این روش فقط برای کارهای علمی و ریاضی کار می‌رود.

(۴۵)

مثال ۱ به کمک استقار ریاضی ثابت کنید

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \text{برای هر عدد طبیعی } n$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$n=1 \quad p(1) ?$$

$$1 = \frac{(1+1)1}{2}$$

$$1 = 2 \times \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$p(n) \xrightarrow{?} p(n+1)$$

فرض استقار

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

?

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{[1+(n+1)](n+1)}{2}$$

حکم استقار

در این عبارت

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{(1+n)n}{2}$$

فرض استقار

?

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{[1+(n+1)](n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

حکم استقار

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{(1+n)n}{2} + n+1$$

طبق فرض استقار

$$= (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \frac{(n+2)}{2} \quad \checkmark$$

التماعه ممکن است شروع این خاصیت لزوماً از  $n=1$  نباشد مثلاًاز  $n=4$  در این صورت به عنوان مرحله اول می‌توانیم  $p(4)$  را ثابت کنیمیا به طریقی  $n=1$  مثلاً از  $n=-2$  آغاز شود در این صورت هم باید  $p(-2)$  ثابت شود

مثال ۱ به کمک استقار ثابت کنید

$$n! \geq 2^n$$

برای  $n \geq 4$ 

$$p(4) ?$$

مرحله اول

$$p(n) \xrightarrow{?} p(n+1)$$

فرض استقار

حکم استقار

مرحله دوم

$$p(4) \equiv 4! \geq 2^4 \quad ?$$

$$24 \geq 16 \quad \checkmark$$

$$p(n) \stackrel{?}{\Rightarrow} p(n+1)$$

$$n! \geq 2^n \quad \text{فرض استقرار برای } n \geq 4$$

$$(n+1)! \geq 2^{n+1} \quad \text{حکم استقرار}$$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1) = \underbrace{n! \times (n+1)}_{\text{فرض استقرار}} \geq 2^n (n+1)$$

$$n \geq 4 \Rightarrow n+1 \geq 5 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow 2^n \times (n+1) \geq 2^n \times 2 = 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n+1)! \geq 2^{n+1}$$

مثال دیگر: ویرایش کامپیوتری، پس از گذشت  $n$  ساعت،  $p_n$  کامپیوتر را آلوده می‌سازد، اگر  $p_0 = 3$  و  $p_1 = 7$  و برای  $n \geq 2$   $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$  ثابت کنید برای هر  $n \geq 0$   $p_n = 2^{n+2} - 1$

حل: اگر فرض کنیم در هر مرحله این مثال یکبار گرفته می‌شود، روش استقرار قوی و نا اطمینان در این حالت باید صحت خاصیت  $P$  برای هر مرحله شروع کنیم. هر  $n=0$  و  $n=1$  را تحقیق شود و همچنین از آنجا که برای محاسبه  $p_n$  در مرحله قبل از این  $n-1$  و  $n-2$  نیاز است پس فرض می‌کنیم  $p_0$  و  $p_1$  صحیح است و برای  $n+1$  تحقیق می‌کنیم عبارت

مرحله اول:  $p_0 = ?$   $p_1 = ?$

$$\underbrace{p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n}_{\text{فرض}} \stackrel{?}{\Rightarrow} p_{n+1}$$

حکم

مرحله اول ۱  
 $(\checkmark) P_0 = 2^{0+2} - 1 = 3 = 3 \checkmark$

$P_1 = 2^{1+2} - 1 = 7 = 7 \checkmark$

$P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1}$

مرحله دوم ۱

$P_{n+1} = 2^{(n+1)+2} - 1 = 2^{n+3} - 1$  ؟

$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1} = 3 \times (2^{n+2} - 1) - 2(2^{n-1+2} - 1) =$   
 طبق فرض

$3 \times 2^{n+2} - 3 - 2 \times 2^{n+1} + 2 = 3 \times 2^{n+2} - 2^{n+2} - 2 = 2 \times 2^{n+2} - 2 = 2^{n+3} - 2 \checkmark$

اصل استقرای ریاضی متوجه  
 اگر خاصیت  $P$  جنبه باشد که

اولاً، عدد صحیح مثبتی (عدد طبیعی) موجود باشد به طوری که خاصیت  $P$   
 برای اعداد طبیعی ۱ تا  $q$  برقرار باشد یعنی  $P(1)$  و  $P(2)$  و ... و  $P(q)$  برقرار باشد.

ثانیاً،  $K \gg q$  داشته باشیم  
 $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(K)) \Rightarrow P(K+1)$

آنگاه خاصیت  $P$  برای هر عدد طبیعی  $n$  صحیح است یا به عبارتی

$\forall n : P(n)$

مثال ۱: تعداد استقرای متوجه است کنید اگر  $a_1 = 1$  و  $a_2 = 3$  و برای  
 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$  ،  $n \geq 3$  آنگاه برای  $a_n \leq 3^n$  ،  $n \geq 1$ .

حل: در این مثال برای محاسبه هر عدد به سه عدد قبلی نیاز داریم بنابراین

مرحله اول باید ثابت کنیم  $a_1$  ،  $a_2$  ،  $a_3$  در خاصیت فوق صدق می کنند.

یعنی  $a_2 \leq 3^2$  ؟  $a_1 \leq 3^1$  ؟  $a_0 \leq 3^0$  ؟  
 $3 \leq 9 \checkmark$   $2 \leq 3 \checkmark$   $1 \leq 1 \checkmark$

مرحله دوم ۱

$P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$(4) \quad p_{n+1}: a_{n+1} \leq 3^{n+1} ?$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \leq 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2}$$

$$3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} = 3^{n-2} (3^2 + 3 + 1) = 3^{n-2} \times 13 \leq \underbrace{3^{n-2} \times 27}_{3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq 3^{n+1} \quad \checkmark$$

مثال ۱ - عدد استقرار فوق ثابت کننده هر  $n \geq 24$  صورت

از ضرایب ۵ یا ۷ قابل نمایش است.

$P_{24} ?$

حل ۱ - عدد استقرار مرحله اول ۱

$$(P_{24}, P_{25}, \dots, P_n) \Rightarrow P_{n+1}$$

$$24 = 14 + 10 = 2 \times 7 + 2 \times 5 \checkmark$$

$$n+1 = (n+1) - 5 + 5 = (n-4) + 5$$

طبق فرض  $n-4$  در خاصیت  $P$  صدق می کند پس

$$n-4 = A \times 5 + B \times 7$$

$$\Rightarrow n+1 = (A \times 5 + B \times 7) + 5 = (A+1) \times 5 + B \times 7 \checkmark$$

و یا

$$n+1 = (n+1) - 7 + 7 = (n-6) + 7$$

$$n-6 = A \times 5 + B \times 7 \Rightarrow n+1 = (A \times 5 + B \times 7) + 7 = A \times 5 + (B+1) \times 7$$

نتیجه قابل ذکر آنست که اثبات مطالبی که به این شکل خواص میسر می آید حتماً به این باشد، یعنی هنگام اثبات آن، به معنای ساختن که به خواص میسر می باشد و هم چنین گام می برد (که روش اثبات از جمله یا گزاره آن که باید اثبات شود حالب ترو حذا بر است که هر دانشمند) در پی یافتن روش های دیگر اثبات می باشند.

۱- صحت استنتاجها را زیر را ثابت کنید

- $\{[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \wedge q)\} \vdash r$
- $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [(\sim q) \vee (\sim s)] \vdash [(\sim p) \vee \sim r]$
- $\{[p \rightarrow q] \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)\} \vdash (q \vee s)$
- $\{[p \rightarrow q] \wedge p \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \sim q)\} \vdash (s \vee m)$
- $\{p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\} \vdash r$
- $\{p \wedge (\sim q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (s \vee q))\} \vdash s$
- $(p \leftrightarrow q) \wedge (\sim p) \rightarrow r \wedge (\sim r) \vdash q$
- $\{[p \vee q] \wedge (\sim q \vee r)\} \vdash p \vee r$
- $\{[p \leftrightarrow q] \wedge (q \leftrightarrow r)\} \vdash (p \leftrightarrow r)$
- $\{p \wedge ((p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p)\} \vdash (p \rightarrow q)$
- $\{p \wedge q \wedge [(p \wedge q) \rightarrow r]\} \vdash r$
- $\{p \wedge q \wedge [(p \wedge q) \rightarrow r]\} \wedge (\sim p) \wedge (\sim w) \vdash (f \rightarrow p)$

۲- درستی استنتاج زیر را تأیید کنید

- اگر علی در فرانشه زندگن نکرده، آنگاه نخواهد توانست فرانشه را صحبت کند.
- علی نفر تواند عاشقین کا دیلاک مراند.
- اگر علی در فرانشه زندگن نکرده، آنگاه وی دو جرحه سوار می خواهد کرد.
- یا علی فرانشه صحبت می کند یا کا دیلاک می راند.
- بنابراین علی دو جرحه سوار می کند.

۳- با ارائه دلیل یقین کنید کدامیک از استنتاجها را معتبر است.

|                                                                                       |                                                                                                                   |                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad (\sim q) \rightarrow \sim p \quad p}{r}$ | $\frac{p \rightarrow r \quad p \rightarrow (q \vee \sim r) \quad (\sim q) \vee (\sim s) \quad p}{s}$              | $\frac{(p \wedge q) \vee r \quad q \rightarrow (r \vee s) \quad (\sim p) \rightarrow q}{p \vee s}$ |
| $\frac{A \rightarrow (B \vee C) \quad A \wedge B \quad A \rightarrow C}{D}$           | $\frac{A \rightarrow B \quad (C \vee A) \rightarrow (C \vee B)}{(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)}$ | $\frac{R \quad R \rightarrow A \quad (A \vee B) \rightarrow C}{C}$                                 |

$$p \rightarrow (q \vee w)$$

$$(\sim q) \wedge p$$

$$p \rightarrow \sim w$$

$$\sim y$$

$$r \rightarrow p$$

$$r$$

$$(p \vee q) \rightarrow w$$

$$\sim w$$

$$(\sim q) \rightarrow (r \rightarrow \sim s)$$

$$\sim q \vee t$$

$$(\sim p) \rightarrow r$$

$$\sim t$$

$$s \rightarrow p$$

$$p \rightarrow q$$

$$(w \vee p) \rightarrow (w \vee q)$$

$$p \vee q$$

$$p \rightarrow r$$

$$q \rightarrow s$$

$$s \vee r$$

$$p \rightarrow q$$

$$(\sim q \vee r) \wedge \sim r$$

$$\sim[(\sim p) \wedge s]$$

$$s$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$\sim(p \wedge r)$$

$$s \vee p$$

$$s$$

$$p \rightarrow q$$

$$(w \rightarrow p) \rightarrow (w \rightarrow q)$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

$$p \wedge s$$

$$q \wedge r$$

$$r$$

$$p \vee q$$

$$q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow s$$

$$\sim s$$

$$r \wedge (p \wedge q)$$

اگر کودک گرسنه باشد، اگر چه خواب کند.  
اگر کودک ناراحت باشد، اگر چه نخوابد کند.  
اگر کودک ناراحت باشد، صورتش سرخ خواهد شد.  
بنابراین: اگر کودک گرسنه باشد، آنگاه صورتش قرمز می شود.

اگر علی به دلیل بیماری در مدارس شرکت نکند، از دانشگاه اخراج می شود.  
اگر علی از دانشگاه اخراج شود آنگاه تخصص کار را کسب نمی کند.  
اگر علی کتابهای زیادی را مطالعه کند، تخصص کار را کسب می کند.  
بنابراین: علی به دلیل بیماری در مدارس شرکت نمی کند و کتابهای زیادی را خوانده.  
اگر ما شین تازه ای بخریم، زمستان می توانیم به مشهد برویم. (چهارمست) به مشهد سفر روا  
ما شین تازه ای نخواهیم خرید.

اگر کار می بیند اکتم و سخت کار کنیم، ترفی خواهیم کرد. ترفی نکرده ام. بنابراین یا کار می  
بیند اگر در ۲ یا سخت کار نکردم.  
اگر کار می بیند اکتم و سخت کار کنیم، ترفی خواهیم کرد. ترفی نکرده ام. بنابراین  
کار می بیند اگر در ۲.

Q1

1

$$\begin{array}{l} r \rightarrow \sim q \\ r \vee s \\ s \rightarrow \sim q \\ p \rightarrow q \\ \hline p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s \rightarrow q \\ s \vee r \\ \sim r \\ (\sim r) \leftrightarrow q \\ \hline p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [\sim(p \rightarrow q)] \rightarrow \sim(r \vee s) \\ (q \rightarrow p) \vee \sim r \\ r \\ \hline p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ (\sim q) \vee r \\ \sim r \\ \hline p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow (B \vee C) \\ B \wedge A \\ A \rightarrow C \\ \hline D \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ (C \vee A) \rightarrow (C \vee B) \\ \hline (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r \\ r \rightarrow A \\ (A \vee B) \rightarrow C \\ \hline C \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \rightarrow (s \vee u) \\ \sim s \\ \hline u \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ (\sim q) \rightarrow (\sim p) \\ p \\ \hline r \end{array}$$

- یا در درس ۱ همان ها که سه مرتبه عالی خواهم رفت و یا قبول نخواهم شد.
- اگر قبول شوم به سر بازن خواهم رفت.
- مرتبه عالی گرفته ام.
- بنابراین به سر بازن خواهم رفت.

- یا در درس ۱ همان ها که سه مرتبه عالی خواهم رفت و یا قبول نخواهم شد.
- اگر قبول شوم به سر بازن خواهم رفت.
- مرتبه متوسط گرفته ام.
- بنابراین به سر بازن خواهم رفت.

۴- درستی استیجابها را زیر را ثابت کنید.

- علی حجت کار می کند.
- اگر علی حجت کار کند، او یک فرد فعال است.
- اگر علی فعال باشد، می تواند شغل پیدا کند.
- بنابراین علی شغل خواهد یافت.

- اگر عوا باران باشد یا هوا آلود باشد، آنگاه مسابقات رالی برگزار خواهد شد و نیست باز است.
- اگر مسابقات رالی برگزار شود، جایزه نفیس خواهد داشت.
- جایزه ندارند.
- بنابراین هوا باران بود.

۵- با فرض آنکه

- اگر شاهد A است بگوید آنگاه B نیز حقیقت را می گوید.
- دو شاهد B و C هر دو با هم نمی توانند راست بگویند.
- دو شاهد B و D هر دو با هم نمی توانند دروغ بگویند.
- اگر شاهد D راست بگوید، B دروغ می گوید.
- بگوید استیجاب ثابت کنید کدام یک از عده ها A، B و C، D بطور یقین راست گفته است.

(۵۴)

۶- به کمک مربع خلف ثابت کنید اثر  $3n+2$  یک عدد طبیعی فرد است  
 (تفاوت  $n$  نیز یک عدد طبیعی فرد است، همچنین - کمک مربع خلف ثابت کنید  
 $\sqrt{2}$  عدد گنگ است)

۷- به کمک استقرای ثابت کنید  
 برای  $n \in \mathbb{N}$   

$$\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

برای  $n \geq 17$ ،  $2^n > n^4$ ،  $n \geq 9$ ،  $4^n > n!$   
 برای  $n \geq 4$ ،  $n! \geq 2^n$

برای  $n \in \mathbb{N}$   
 (دو جمله ای بودن)  

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad n \geq 2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$3^n > 2^n + 64 \quad n > 3$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$n^3 + 1 > n^2 + n \quad n \geq 2$$

$$(1+n)^n \geq 1 + n^2 \quad n \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

برای  $n \in \mathbb{N}$ ،  $6^{n+2} + 7^{2n+1}$  بر 43 قابل قسمت است

۸- به کمک استقرای قوی ثابت کنید

اثر  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$  برای  $n \geq 2$  و  $a_1 = 2$  و  $a_2 = 6$

برای  $n \geq 0$ ،  $a_n = 5 \times 3^n + 7 \times 2^n$

هر عدد طبیعی  $n \geq 14$  بصورت حاصل عمل از ضربات 3 و یا 8 قابل نمایش است

۹- به کمک مربع خلف ثابت کنید اثر اعداد  $10$  را بر دایره  $10$  قرار دهیم

درست که مجموع به عدد متوالی  $17$  از اعداد  $10$  خواهد بود.

۱۰- به کمک استقرای قوی، همچنین - کمک استقرای ثابت کنید هر عدد طبیعی  $n \geq 35$ ،  
 نمایش به صورت مجموع ضرباتی از 2 و 5 دارد.

(55)

۱۱- به کمک استقرای قوی ثابت کنید، اگر  $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$  جمله  $n$ ام رشته فیبوناچی باشد طوری که برای  $a_0 = 0$  و  $a_1 = 1$  و برای  $n \geq 1$  طریقی،

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

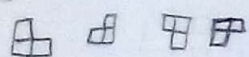
آنگاه برای هر  $n$  صحیح نامنفرد داریم

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

و  $\frac{1}{\sqrt{5}} \sim 0.4472$  و  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^n - b^n)$  برای  $n \geq 1$  که در آن  $a$  و  $b$  ریشه های معادله  $x^2 - x - 1 = 0$  هستند.

۱۲- صفحه شطرنجی ناقصی که تونید اگر یک از خانه های آن حذف شود.

به کمک استقرای ثابت کنید هر صفحه شطرنجی ناقص به اندازه  $2^n \times 2^n$  (برای  $n \geq 1$ ) را می توان توسط مهره های  $L$  (شکل که از به هم چسبیدن سه خانه مربع شکل شطرنجی ایجاد شود، می توان پوشاند.



تعریف مجموعه

محمد به از مفاهیم تعریف شده با فرض است و در بطور عمده (متن تعریف می کنیم)  
 دسته ای از اشیاء یا افراد یا اعداد است که دارای صفت یا خاصیت یا ویژگی  
 مشترک باشند اما از آنجا که خاصیت و همچنین دسته تعریفی فاوی ندارد این  
 تعریف غیر دقیق است

مجموعه عا را با حروف بزرگ (یا انگلیسی) نشان می دهند مثل  $A, B, C, \dots$   
 و برای نشان دادن وابستگی اشیاء یا افراد یا اعداد به مجموعه از حروف  $E$  که آن  
 را تعلق و یا عضویت می نامیم استفاده می کنیم.

به عبارت  $A$  مجموعه است اگر و تنها اگر برای هر شیئی  $x$  یکی و فقط یکی از دو حالت  
 زیر برقرار باشد  $x \in A$  یا  $x \notin A$  و فقط یکی از این دو.

و اگر  $x \in A$  در این صورت  $x$  را یک عضو و یا یک عضو مجموعه  $A$  می نامیم.

اعضای یک مجموعه را با حروف کوچک (یا انگلیسی) مانند  $a, b, c, \dots$  نشان  
 می دهیم.

متغیر علامت یا حرف است که می تواند نشانگر هر عضو یک مجموعه باشد و معمولاً  
 با حرف کوچک نشان داده می شود.

تعریف گزاره فا

عبارتی که شامل یک یا چند متغیر از جمله سبقت باشد را گزاره فا می گویند. عبارتی  
 درستی یا نادرستی این عبارت به مقدار متغیرها بستگی دارد. سبقت دارد  
 (منطقاً از جمله سبقت یا حوزه تغییر) مجموعه  $x$  هائی است که به ازای  
 آنها گزاره فا معنی دار باشد.

بطور مثال، جمله زیر گزاره فا هست.

$$x^2 + 3 = 7$$

$$x - 4 = 1$$

درستی یا نادرستی عبارات بالا با گام مقدار  $x$  سبقت دارد، مثلاً در  $x^2 + 3 = 7$   
 اگر  $x = \pm 2$  عبارت صحیح و در غیر این صورت نادرست است.

این دو گزاره ها را با یک متغیر دو واسطه است که همان منطق است. (۵۷)

$$x^2 + y^2 + z = 1$$

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$$

در عبارت فوق نیز گزاره ها همان به ترتیب از ۱ تا ۳ با یک متغیر دو واسطه است.

در تمام عبارات فوق درستی یا نادرستی عبارت به مقدار متغیر همان یکبار فرضه در مرسوم میگرداند.

برای نشان دادن (دار) بعضی مقولات از حرف  $\forall$  به معنی جهانی : universal

در این اعداد مقولات از  $R$  یا  $N$  استفاده می شود

مقولات گزاره ها را با حرف بزرگ نشان می دهند و پس از نام گزاره ها متغیر همان یکبار فرضه را در داخل پرانتز می نویسند. مثلاً:

$$x^2 + y^2 = 3 - z$$

در این گزاره ها  $R$  نام گزاره ها  $x$  و  $y$  و  $z$  متغیر همان یکبار فرضه می باشند و  $x^2 + y^2 = 3 - z$  خاصیت معادله یا مرسوم گزاره ها می باشد.

همچنین جالب است بدانیم گزاره ها ممکن است مرکب باشند و از ترکیب گزاره ها عیناً با یک متغیر همان یکبار فرضه در گزاره ها می باشند.

$$R : x < y \Rightarrow x^2 < y^2$$

گزاره ها را می توان چنین هم نوشت:

$$R(x, y) : A(x, y) \rightarrow B(x, y) \quad \text{که در آن}$$

$$A(x, y) : x < y \quad , \quad B(x, y) : x^2 < y^2$$

مثال: در درستی عبارت‌ها زیر تحقیق کنید

$P(n)$  : جمله  $n$  شامل حرف  $a$  است

$P(\text{Lemon})$  ؟

$P(\text{orange})$  ؟

حل: واضح است که در این گزاره (عبارت) سخن مجموعه همه کلمات معنی دار زبان انگلیسی می‌باشد

$P(\text{Lemon})$  : جمله  $\text{Lemon}$  شامل حرف  $a$  است

این یک گزاره است (الترجیحاً  $n$  جمله  $\text{Lemon}$  را قرار دهیم) یک گزاره غلط

$P(\text{orange})$  : جمله  $\text{orange}$  شامل حرف  $a$  را دربردارد

این یک گزاره است (الترجیحاً  $n$  جمله  $\text{orange}$  قرار دهیم) یک گزاره صحیح است

مثال: در درستی عبارت‌ها زیر تحقیق کنید

$P(3)$  و  $P(-2)$  و  $P(4)$

فرموله

$P(n)$  :  $n > 3$

حل: واضح است که در اینجا حرف سخن مجموعه اعداد حقیقی است

|           |          |   |
|-----------|----------|---|
| $P(3)$ :  | $3 > 3$  | F |
| $P(-2)$ : | $-2 > 3$ | F |
| $P(4)$ :  | $4 > 3$  | T |

$Q(n, y)$  :  $n + y = 2$

$Q(3, 1)$  :  $3 + 1 = 2$  F

$Q(5, -3)$  :  $5 + (-3) = 2$  T

در ترکیب گزاره ها مانند گزاره‌هاست، به لحاظ آنکه عبارت منتهی مقدار قرار دهیم گزاره‌ها می‌تواند تبدیل شود و می‌تواند حاصل فوق ارزشی این گزاره را تعیین کرد

همواره

ما قرار دادیم سورها و یا به عبارتی نگارند (کلمات) حاسب همه، هرگاه تعیین، برخی، وجود دارد، همیشه، گزاره‌ها می‌تواند تبدیل شود، در این صورت این گزاره یعنی گزاره‌ها که در اینجا آن سور نگارنده باشد را

گزارهٔ مسوّر و ناممکن در واقع تعیین می‌کنیم که تابع گزاره‌خام از همهٔ مقادیر از متغیر صحیح است.

اگر نخواهیم توضیح دهیم تا اعضاء جابجایی سخن در خاصیت مثل  $P$  صدق می‌کنند از سور معمول یا سور جابجایی استفاده می‌کنیم و از مکمل‌ها مانند  $\neg$  و  $\wedge$  و  $\vee$  استفاده می‌کنیم تا جملات صحیح را بنویسیم.

$$\forall x : P(x) \quad \text{یا} \quad (\forall x) (P(x))$$

مثلاً در رسم می‌خوانیم: از آن  $x$  (جایی) سخن در خاصیت  $P$  برقرار است و یا همهٔ اعضاء (جایی) سخن در خاصیت  $P$  صدق می‌کنند.

مثال ۱

$$\forall n \in \mathbb{R} : |n| \geq n-1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : n! \geq 2^{n-1}$$

و اگر نخواهیم توضیح بدهیم یعنی از اعضاء (جایی) سخن در خاصیت  $P$  صدق می‌کنند. فقط یعنی ابرضای وجود دارد در اینجا می‌بینیم و آن را سور وجود می‌نامیم و یا غار زیر نشان می‌دهیم. یا دست کم

$$\exists x \in P(x)$$

و می‌خوانیم وجود دارد  $x$  ای که در خاصیت  $P$  صدق کند. علامت  $\exists$  را می‌خوانیم بطوریکه در بعضی از متن‌ها به جای این علامت از  $s.t.$  مخفف می‌کنند  $\text{such that}$  استفاده می‌شود.

مثال ۲

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 7$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y : x - y = y$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} : n < x < n+1$$

برضای این مقدار را با سور می‌نویسند. برخی از زبان‌ها به سبب استفاده می‌کنند.

توضیح ۱

الف) اگر در سور وجودی بر وجودیت موقوف نماند باشد یعنی

(40)

وجودیت موضوع منحصر فرد باشد، سور وجودی را سور یکتایی نامید  
با قرار  $\exists$  نشان می دهیم بطور مثال:

$$\exists! \alpha \quad \sin(\alpha) = \alpha$$

$$\exists! n \quad \forall y : ny = y$$

$$\exists! n \in \mathbb{N} \quad n + \frac{1}{n} = 2$$

$$\exists! n \in \mathbb{N} \quad n \in \mathbb{N} \cap \mathbb{P}$$

↓  
مجموعه اعداد اول  
↓  
مجموعه اعداد زوج

مجموعه اعداد اول، Prime، فرد odd، زوج even

مجموعه اعداد  $\mathbb{N}_0$  مجموعه اعداد زوج،  $\mathbb{N}_e$

عدد حقیقی دقیقاً بین  $n$  و  $n+1$   $\exists! n \in \mathbb{Z} \quad n < x < n+1$   
عدد صحیح و کسر صحیح و کسر اعشاری قرار دارد.

ب. اگر لفظ به ازاء هیچ مقدار و یا وجود ندارد در گزاره بکار رفته باشد،  
آ را سور، صفر می نامیم، با نماد  $\#$  آ را نشان می دهیم.

$$\# n \in \mathbb{P}(n)$$

یعنی هیچ  $x$  ای در خاصیت  $P$  صدق نمی کند که معادل گزاره زیر است

$$\# n \in \mathbb{P}(n) \equiv \forall n, \neg P(n)$$

مثال:

$$\# \alpha \quad \sin(\alpha) = +4 \equiv \forall \alpha, \sin(\alpha) \neq +4$$

ب. عبارت سور، صفر (هیچ) سور، عموم است یا توصیف بالا

$$\# n \in \mathbb{R} \quad n^2 + 2 = 0 \equiv \forall n \in \mathbb{R}, n^2 + 2 \neq 0$$

مثال: با فرض آنکه  $\mathbb{N}$  مجموعه همه اعداد صحیح و اعداد صحیح را نشان دهد  
خاصیت  $P$ ، بیشتر از 5 است در حقیقت مداس رفتن باشد، حملات زیر

را به فارسی روایت کنید.

$$\forall n \in P(n)$$

همه دانشجویان این دانشگاه، بیشتر از 18 ساعت در هفته به کلاس می‌روند.

$$\exists n \in P(n)$$

بعضی از دانشجویان این دانشگاه، بیشتر از 18 ساعت در هفته به کلاس می‌روند.

$$\forall n, \neg P(n)$$

همه دانشجویان این دانشگاه، بیشتر از 18 ساعت در هفته به کلاس نمی‌روند.

$$\forall n, \neg P(n) \equiv \exists n \in \neg P(n)$$

هیچکدام از دانشجویان این دانشگاه، بیشتر از 18 ساعت در هفته به کلاس نمی‌روند.

18 ساعت در هفته به کلاس نمی‌روند.

$$\exists n \in \neg P(n)$$

برخی از دانشجویان این دانشگاه، بیشتر از 18 ساعت در هفته به کلاس نمی‌روند.  
یا برخی از دانشجویان این دانشگاه، حداکثر 18 ساعت در هفته به کلاس می‌روند.

مثال: اگر  $U = R$ ، عبارت  $\forall x (x \in U)$  (هر اشیاء حقیقی در مجموعه  $U$  قرار دارد) را به فارسی روایت کنید.

$$\forall x \exists y \in x$$

برای هر عدد حقیقی  $x$ ، یک عدد حقیقی  $y$  وجود دارد که  $x$  بزرگتر از  $y$  باشد و  $y$  وجود دارد.  
و یا به عبارت دیگر، مجموعه اعداد حقیقی از بالا کراندار نیست.

$$\exists x \in U : \forall y \in U, x \leq y$$

عدد حقیقی  $x$  وجود دارد که در هر عدد حقیقی  $y$  بزرگتر یا مساوی  $x$  قرار دارد.  
یا به عبارت دیگر، مجموعه اعداد حقیقی از پایین کراندار است.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \exists z \in \mathbb{Z} : x + y = z$$

جمع هر دو عدد حقیقی، یک عدد حقیقی است. یا به عبارت دیگر، مجموعه اعداد حقیقی نسبت به جمع بسته است.

اگر فرض کنیم  $\mathbb{Z}$  مجموعه اعداد صحیح، مجموعه جابجایی  $\mathbb{Z}$  بر روی  $\mathbb{Z}$  به صورت زیر تعریف شود:  
 $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$   
 (مجموعه) بنویسید.

- مجموعه  $\sim$  روی  $\mathbb{Z}$  یک رابطه معادل است.

$$\forall m, \forall n : m < n \iff m + w < n + w$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} : m < n \iff m + w < n + w$$

- خاصیت ردی در  $\mathbb{Z}$  صحیح است، زیرا  $\sim$  صحت نیست.

$$\forall m, \forall n : m > n \not\Rightarrow m + w > n + w$$

$$\equiv \exists m, \exists n \in \mathbb{Z} : m > n, n > m, m - n \neq 0$$

$$\equiv \exists m, n \in \mathbb{Z} : m > n, m - n \leq 0$$

- مجموعه مرتبات (عدد صحیح) بزرگترین برابر مجموعه اعداد است.

$$\forall m, \forall n : m^2 + n^2 > m + n \iff \forall m, n : m^2 + n^2 \geq m + n$$

- قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد صحیح، برابر حاصل ضرب قدر مطلق هاست.

$$\forall m, n : |m \times n| = |m| \times |n|$$

- عدد صحیح مثبت، مجموعه مرتبات  $\mathbb{N}$  یک عدد صحیح است.

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists a, \exists b, \exists c, \exists d \in \mathbb{N} : x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

مثال ۲: اگر  $\mathbb{Z}$  را با اعداد صحیح بنویسید.

اگر دانشجو، درس خوانده، آگاه، عضو دانشجو یا درس خوانده.

حل: اگر  $\mathbb{Z}$  مجموعه اعداد صحیح باشد،  $p(x)$  و  $x$  در  $\mathbb{Z}$  خوانده شود.

$$(\exists x \in \mathbb{Z} : p(x)) \rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z} : p(x))$$

توضیح: ممکن است در  $\mathbb{Z}$  یک عدد صحیح  $x$  باشد که  $p(x)$  درست باشد، اما در  $\mathbb{Z}$  یک عدد صحیح  $y$  باشد که  $p(y)$  نادرست باشد. مثلاً اگر  $A(x) \leftrightarrow B(x)$  یک توتولوژی باشد، پس  $A(x) \leftrightarrow B(x)$  در  $\mathbb{Z}$  درست است.

$$A(x) : x \text{ یک عدد صحیح زوج بزرگتر از ۱۳ است}$$

$$B(x) : x \text{ یک عدد طبیعی و } x > 4 \text{ است}$$

# تعریف محور: تغییر یا جابجایی

مجموعه‌ای که جانشین متغیر گزاره‌ها می‌شوند را یک گزاره  
تبدیل کننده محور: تغییر یا جابجایی می‌نامند. مثال در گزاره‌ها  
 $n > 3$  واضح است که  $n$  باید عدد باشد. بدین مجموعه جابجایی  
محور: تغییر را مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. مثلاً آنکه خلاف آن  
مثلاً به این صورت:  $n$  یک عدد صحیح یا طبیعی یا گویا باشد.

و یا وقتی  $n$  گوییم  $n$  یک سیاه‌ساز عادل است، واضح است که  $n$  باید  
یک انسان باشد. بدین مجموعه مرجع مجموعه‌ای که  $n$  می‌گیرد زمین و یاد است که  
همه سیاه‌سازان یک موهبت باشد.

و یا وقتی  $n$  گوییم سریعترین دهنده اوان خنجر است، معلوم است که  
 $n$  باید یک جانور باشد و مجموعه مرجع مجموعه‌ای که  $n$  می‌گیرد زمین است.

## تعریف مجموعه حوا

مجموعه‌ای که اعضای آن محور: تغییر یا جابجایی می‌شوند را یک گزاره  
صحیح تبدیل می‌کند.

$$\forall n \in \mathbb{R}, n^2 > 0$$

$$U = \mathbb{R}$$

جایگزینی

$$S = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$S = \mathbb{R} - \{0\}$$

مجموعه حوا

$$\exists n \ni n^2 + 1 = 2$$

$$n^2 + 1 = 2 \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow n = \pm 1$$

$$U = \mathbb{R}, S = \{ \pm 1 \}$$

جایگزینی

$$\exists \alpha \ni \sin(\alpha) = 4$$

$$U = \mathbb{R}$$

جایگزینی

$$S = \emptyset$$

مجموعه حوا

درستی گزاره‌ها را می‌توانیم

در حالت خاص فرض می‌کنیم  $\forall n, P(n)$  یک گزاره‌ای است که  
عمومی و جایگزینی آن مجموعه‌ای است  $\{n_1, n_2, \dots, n_n\}$  باشد.



(65)

ارائه برای هر عدد حقیقی  $n$  داریم  $n < [n] + 1$  پس  $[n] \leq n$  پس  
 برای  $n$  و  $n$  که فرض است قرار دهیم  $n = [n]$  پس  $U = S = \mathbb{R}$

برای  $n$  و  $n$  اگر حقیقی  $y$  ای موجود باشد باید  
 $\forall n \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } ny = 1$  F

واضح است که برای  $n = 0$  حقیقی  $y$  ای وجود ندارد بنابراین  
 $ny = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{n}$

بنابراین این گزاره غلط است.  
 $U = \mathbb{R}, S = \mathbb{R} - \{0\}$

$\exists n \in \mathbb{R} \text{ s.t. } n^2 + n - 6 = 0$  T

$n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow (n+3)(n-2) = 0 \Rightarrow n = -3 \text{ یا } n = 2$   
 $\Rightarrow U = \mathbb{R}, S = \{-3, +2\} \Rightarrow S \neq \emptyset \Rightarrow$  گزاره صحیح است

$\exists n \in \mathbb{R} \text{ s.t. } n^2 + 1 = 0$  F

$n^2 + 1 = 0 \Rightarrow n^2 = -1 \nRightarrow S = \emptyset$   
 تا وقتی زیرمجموعه صفر عدد حقیقی منفی نیست.

$\exists n \in \mathbb{R} \text{ s.t. } n + \frac{1}{n} = 2$  T

$n + \frac{1}{n} = 2 \Rightarrow \frac{n^2 + 1}{n} = 2 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow S = \{1\} \neq \emptyset$

نکته: اگر گزاره عام، مسواریت را نیز مسواریت باشد جابجایی سورها را در واقع جابجایی نیست، - عبارت با جابجایی جابجایی سورها را در واقع مستقل از گزاره قبل حاصل می شود. گزاره هر دو سور معمولی دریا و در دو سور وجودی است که در این حالت مفاد سور هر دو را می توان فقط یکبار نوشت.

$$\forall x, \forall y, p(x, y) \equiv \forall x, y, p(x, y)$$

$$\exists x, \exists y, p(x, y) \equiv \exists x, y, p(x, y)$$

$$\forall x, \exists y, p(x, y) \neq \exists y, \forall x, p(x, y)$$

- عبارت ترتیب سورها اهمیت دارد.  
مثال

$$\forall n \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Z} \exists n > n$$

این گزاره صحیح است زیرا برای هر  $n$  (توانا) قرار داد  $n+1$

$$\forall n \in \mathbb{R} : n < \frac{n+1}{2}$$

اما با جابجایی ترتیب سورها داریم:

$$\exists z \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{R} : n > n$$

این یک عدد صحیح وجود دارد که از همه اعداد حقیقی بزرگتر است که معنی از بالا گرانده (توانا) مجموعه اعداد حقیقی است و این غلط است.

$$\forall n \in \mathbb{R} \exists y \ni n+y=0 \quad T$$

مثال

$$n+y=0 \Rightarrow y=-n$$

برای هر  $n$  (توانا)  $y=-n$  وجود دارد و در اینجا لا اصدق می کند پس این گزاره صحیح است در حالی که،

$$\exists y \ni \forall n \in \mathbb{R} : n+y=0 \quad F$$

این گزاره - این معنی است که یک  $y$  وجود دارد که قرینه همه اعداد حقیقی است و چنین نیست.

مثال ۱۱ از سبب گزاره ها زیر را قیاس کنید

$$\forall x \in A, \exists y \in A, x > y$$

$$\exists x \in A, \forall y \in A, x > y$$

حل: ۱) گزاره اول بر مبنای  $x$  قرار داریم  $y = x - 1$  داریم  $x > x - 1$  و این گزاره صبیح است

$$\exists y \in A, \forall x \in A, x > y \quad F$$

چنین یک عدد حقیقی  $y$  وجود دارد که از عدد اعداد حقیقی کمتر است  
 - بنابراین مجموعه اعداد حقیقی از پایین کرانه دار است که چنین نیست  
 بنابراین این گزاره غلط است زیرا می توانیم چنین استدلال کرد  
 که اگر چنین  $y$  وجود داشته باشد این  $y$  برابر  $-1 = y$  نیز صبیح است  
 یعنی  $y > -1$  که تناقض است.

بنابراین جایگاه سورها در حالت کلی مجاز نیست و با جایگاه کردن  
 سورها عملاً گزاره مستقل از گزاره قبل حاصل می شود مگر  
 آنکه عدد سور عمومی یا عدد سور وجودی باشد



نیمه خاصیت مورگان  $\textcircled{79} \equiv \exists n \ni (\sim p(n)) \vee (\sim q(n))$

\*  $\exists n \ni (p(n) \rightarrow q(n))$  قاعده تفسیر و مورگان  
 $\sim(\exists n \ni p(n) \rightarrow q(n)) \equiv \forall n, \sim(p(n) \rightarrow q(n))$

$\equiv \forall n, \sim(q(n) \vee \sim p(n)) \equiv \forall n, (\sim q(n) \wedge \sim(\sim p(n)))$  مورگان  
 معادل ترکیبی

$\equiv \forall n, (\sim q(n) \wedge p(n))$  نفر معنی

\*  $\forall n: n^2 + 1 > 0$

$\sim(\forall n: n^2 + 1 > 0) \equiv \exists n \ni n^2 + 1 \leq 0$

\*  $\forall n \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ni n \geq y$

$\sim(\forall n \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ni n \geq y) \equiv \exists n \in \mathbb{R} \ni \sim(\exists y \in \mathbb{R}, n \geq y)$   
 $\equiv \exists n \in \mathbb{R} \ni \forall y \in \mathbb{R}: n < y$

$\equiv \exists n \in \mathbb{R} \ni \forall y \in \mathbb{R}: n < y$   
 $\sim(\forall n \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{Z} \ni n y < 4 \wedge n + y < 5) \equiv$   
 $\exists n \in \mathbb{N} \ni \forall y \in \mathbb{Z} : \sim(n y < 4 \wedge n + y < 5) \equiv$   
 $\exists n \in \mathbb{N} \ni \forall y \in \mathbb{Z} : n y \geq 4 \vee n + y \geq 5$

حیثیگی

(الف) برانتر و آگولا در کروسه، محدود: عملکرد سورعاً، تفسیر می کنند  
 اگر بعد از یک سور یا رشته آن از سورها، برانتر موجود باشد، نفرین بر این  
 است که این سور فقط مرتبه اول به کار می آید از خودی عمل می کند.

$\forall n (p(n) \rightarrow q(n))$

$\forall n: p(n) \rightarrow q(n) \equiv (\forall n, p(n) \rightarrow q(n))$

ب. مثال آنزازه مسویر زیر را به فارسی روان بیان کنید.

$$\exists x \exists y \forall z, (p(x, y) \wedge p(x, z) \wedge y \neq z) \rightarrow \sim p(x, z)$$

که در آن:  $U$  مجموعه آدمیان در کشور زمینی و  $p(x, y)$  دوستی است بین  $x$  و  $y$ .

حل: این نشان وجود دارد دو نفر  $x$  و  $y$  که اگر  $x$  و  $y$  با هم دوست باشند، پس هر فرد  $z$  که با  $x$  دوست باشد،  $y$  را دوست ندارد. این آنزازه مسویر زیر را به فارسی بیان کرد:

این آنزازه مسویر زیر را به فارسی بیان کرد:

$$\exists x \exists p(x)$$

$U =$  مجموعه آدمیان در کشور زمینی

$p(x)$  فقط یک دوست دارد.

در طرح مثال منطوق این بوده است که می توانیم آنزازه مسویر را گاهی مانند مثال منطوق باید مسویر یا دو مسویر بیشتر نشان داد (منطوق را می توانیم تغییر دهیم).

مثال: مجموعه دانشجویان دانشگاه مسویر زیر تعریف می شود:

$$\forall n, (p(n) \vee (\exists y \exists p(y) \wedge Q(n, y))) = R(n, y)$$

$p(n)$  یک دستگاه کامپیوتر دارد.

$Q(n, y)$   $n$  و  $y$  با هم دوست هستند.

این آنزازه به این معناست که هر دانشجو را یک دستگاه کامپیوتر دارد و یا دوستی دارد که او کامپیوتر دارد.

$$R(n, y) \equiv \forall n, (p(n) \vee Q(n))$$

مجموعه دانشجویان دانشگاه  $U =$

$p(n)$   $n$  کامپیوتر دارد

$Q(n)$   $n$  دوست دارد

ج مثال افترض کنید  $f, g, h$  سه تابع گزاره ای به صورت زیر باشند.

$f(n)$  :  $n$  پرنده است  
 $g(n)$  :  $n$  گنجشک است  
 $h(n)$  :  $n$  پر دارد  
 $U$  : مجموعه حیوانات گله گریزی

آیا استنتاج زیر منطقی است؟  
 - تمام پرندگان پر دارند.  
 - تمام گنجشکها پرند هستند.  
 -----  
 بنابراین تمام گنجشکها پر دارند.

$H_1, \forall n, f(n) \rightarrow h(n)$   
 $H_2, \forall n, g(n) \rightarrow f(n)$   
 -----  
 $D.O. \forall n, g(n) \rightarrow h(n)$

$L_1, \forall n, f(n) \rightarrow h(n)$  فرض  $H_1$   
 $L_2, \forall n, g(n) \rightarrow f(n)$  فرض  $H_2$   
 $L_3 = D.O. \forall n, g(n) \rightarrow h(n)$  نتیجه و بگوئید این

این طرح این مثال منطقی بوده است که قواعد استنتاج را برای گزاره ای به صورت هم (فانده گزاره ای) می توانیم بکار ببریم.

> مثال:  
 $\forall n < 0, \langle n^2 \rangle \equiv \forall n, (n < 0 \rightarrow n^2 > 0)$   
 $\exists n \neq 0, \exists n^2 = 2 \equiv \exists n \in (n \neq 0, n^2 = 2)$   
 در مثال فوق گزاره ای به صورت صحت دارد (گزاره ای به صورت صحت دارد) یا مقدار هر عدد در آن ثابت است.  
 همیشه یک مقدار صحت دارد و چون عملیات را به صورت گزاره ای می توانیم بنویسیم  
 غایتش به عبودیت  
 ۱- هر دانشمندی این کار را در ریاضیات یک راه را انداخته است.

۷۲

$$R(n) = \forall n, p(n)$$

$U =$  مجموعه دانشجویان این مدرسه

$p(n)$ :  $n$  درس ریاضیک را گذرانده است

این گزاره را می شود به صورت زیر عم بیان کرد.

$$R(n) = \forall n, p(n) \rightarrow Q(n)$$

$U =$  مجموعه دانشجویان دانشگاه

$p(n)$ :  $n$  دانشجویان این مدرسه می باشد

$Q(n)$ :  $n$  درس ریاضیک را پاس کرده است

مثال: بعضی از دانشجویان این مدرسه به شهر شیراز سفر کرده اند.

$$\exists n \in p(n) = R(n)$$

$U =$  مجموعه دانشجویان این مدرسه

$p(n)$ :  $n$  به شهر شیراز سفر کرده است

$$R(n) = \exists n \in p(n) \wedge Q(n)$$

$U =$  مجموعه دانشجویان دانشگاه

$p(n)$ :  $n$  دانشجویان این مدرسه است

$Q(n)$ :  $n$  به شهر شیراز سفر کرده است

۱۵

$$\forall n, p(n) \wedge \forall n, Q(n) \equiv \forall n, p(n) \wedge Q(n)$$

$$[\forall n, p(n) \wedge \forall n, Q(n)] \rightarrow [\forall n, p(n) \wedge Q(n)]$$

$$[\exists n \in p(n) \wedge \exists n \in Q(n)] \rightarrow \exists n \in p(n) \wedge \exists n \in Q(n)$$

۱. عبارات زیر را به فارسی درج کنید.

$$U = \mathbb{R}$$

$$\forall n, \forall y : [(n > 0, y < 0) \rightarrow n > y]$$

$$\exists n, y \in \mathbb{R} : n^2 > y \wedge n < y$$

$$\forall n, \forall y : \exists z \in \mathbb{R} \ni n + y = z$$

$$\forall n, \forall y : (n > 0, y < 0 \rightarrow n - y > 0)$$

$$\exists n \ni \forall y : n + y = y$$

$$\forall n, y : (n \neq 0, y \neq 0) \leftrightarrow n \neq 0 \wedge y \neq 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee y = 0$$

$$\exists n, y \in \mathbb{R} : (n \leq 0, y \leq 0, n - y > 0)$$

$$U = \text{مجموعه دانشجویان دانشگاه}$$

$$V = \text{عبارت درستی دانشگاه}$$

$$P(n, y) : \text{دانشجوی } n \text{ درس } y \text{ را نذر انداخت}$$

$$\exists n, y \in U \ni P(n, y)$$

$$\exists n \ni \forall y : P(n, y)$$

$$\forall n : \exists y \in U \ni P(n, y)$$

$$\exists y \in U \ni \forall n : P(n, y)$$

$$\forall n, y : P(n, y)$$

$$\forall y : \exists n \in U \ni P(n, y)$$

$$U = \text{دانش آموزان است} \quad S(n) : \text{مجموعه اسامی دانش آموزان}$$

$$Q(y) : \text{دانش آموز } n \text{ معلم } y \text{ را درس داده است} \quad P(n, y) : \text{دانش آموز } n \text{ معلم } y \text{ را نذر انداخت}$$

$$\forall n : \{ [S(n) \wedge \forall y : (Q(y) \rightarrow P(n, y)) \rightarrow P(n, n)] \}$$

$$\forall n : \{ [S(n) \rightarrow \forall y : (Q(y) \rightarrow P(n, y)) \rightarrow P(n, y)] \}$$

$$\forall n, \forall y : \{ [S(n) \wedge (Q(y) \rightarrow P(n, y)) \rightarrow P(n, y)] \}$$

$$\forall n : \exists y \in [ (S(n) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (P(n, y) \rightarrow P(n, y)) ]$$

۲- حیات بر پایه مفاد ریاضی بنویسید

- همه پرنده‌ها می‌توانند پرواز کنند
- چنین نیست که همه پرنده‌ها پرواز می‌کنند
- همه کودکان خلاق هستند
- بعضی از کودکان خلاقند
- دانشجوی هست که ریاضی را دوست دارد و ادبیات را دوست ندارد
- $n$  یک عدد اول، مزد می‌باشد
- برای همه اعداد صحیح  $n$ ،  $n$  فرد و اول می‌باشد
- عدد صحیح مانند  $n$  وجود دارد که هم فرد و هم اول می‌باشد
- هر عدد صحیح مانند  $n$ ، هم فرد و هم اول است
- اگر دانشجوی تنبل است، همه دانشجویان تنبل هستند
- اگر  $n$  گویا باشد،  $n$  یک عدد حقیقی است
- مجموع عدد صحیح منفی، منفی است
- حاصل عدد صحیح مثبت، لزوماً مثبت نیست
- مجموع مربعات دو عدد صحیح، بزرگتر یا برابر مجموع آنهاست
- هر عدد صحیح مثبت، مجموع مربعات چهار عدد صحیح مثبت است
- اگر هر دانش آموزی همه مملکت را دوست داشته باشد، آنگاه خودش را دوست دارد

توضیح: در سورعوی ممکن است گاهی علامت سورعوی را نمی‌نویسیم مثلاً

خاصیت جمع عمل جابجایی  
 $n + y = y + n$   
 وجود عضو خنثی برای عمل جمع  
 $n + 0 = 0 + n = n$   
 مقبولا سورعوی برای همه متغیرها را صریحاً قواعدی آوردند مثلاً  
 وجود آن برای اینها ضروری باشد  
 مثلاً اگر  $n$  گویا باشد، آنگاه  $n$  حقیقی است

مجموعه اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$

$$\forall n : n \in \Phi \rightarrow n \in \mathbb{R} \equiv n \in \Phi \rightarrow n \in \mathbb{R}$$

۳- نام من آنکه (یا) بعضی مجموعه اعداد صحیح می‌باشد، گزایندها

- الف  $n$  زوج است یا مربع کامل است.
- ب  $n$  اول است و  $n$  بر ۹ قابل قسمت است
- ج  $n$  اول است و  $n$  نزولتر از واحد است.
- د اگر  $n$  اول است، آنگاه  $n$  نزولتر از ۲ است
- ه اگر  $n$  اول است، آنگاه  $n$  مثبت است و زوج نیست.

نمونه جملات زیر را با عبارات ریاضی بنویسید و سپس در درستی آن تحقیق کنید.

- اگر  $a$  و  $b$  مجذور کامل باشند، آنگاه  $a+b$  نیز مجذور کامل است.
- اگر  $a$  و  $b$  مجذور کامل باشند،  $a \times b$  نیز چنین است.
- اعداد مثبت  $a$  و  $b$  موجودند بطوریکه  $a$  و  $b$  و  $a+b$  مجذور کاملند.
- برای هر  $n, y \in \mathbb{R}$ ، اگر  $n+y > 5$ ،  $n \geq 5$  یا  $y \geq 5$ .
- برای هر عدد حقیقی  $n$ ، عدد حقیقی  $y$  وجود دارد بطوریکه  $n=y^3$ .
- برای هر عدد حقیقی  $n$ ، عدد حقیقی  $y$  وجود دارد بطوریکه  $n=y^2$ .
- عدد حقیقی مانند  $y$  وجود دارد بطوریکه برای هر عدد حقیقی  $n$ ،  $n+y > 0$ .
- برای هر عدد گنگ  $n$ ، عدد صحیح  $n$  وجود دارد بطوریکه  $n < n+1$ .
- ۵- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید و آنها را ممکن آ یا اشاره کنید.

$$\forall n \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ni n \leq y$$

$$\forall n \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ni (n+y=4 \rightarrow n > 3)$$

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} \ni n+y > z$$

$$\forall n, n^2+1 > 0$$

$$\forall n, (n > 0 \rightarrow n^2-n < 1)$$

$$\forall n, \exists y \ni n < y \rightarrow (\exists z \ni n < z < y)$$

$$\exists n, y \ni p(n, y) \leftrightarrow q(n, y)$$

۶- گزاره ها را زیر بار بار ریاضی بنویسید و سپس نقیض کنید.

(۷۶)

- هوا روشن است و همه مردم از هوا استفاده می کنند.

- بعضی از دانشجویان تکالیف خود را انجام ندادند یا استاد غایب است.

- هر دانشجوی این کلاس در درس ریاضی یک را گذرانده است.

- هر دانشجوی این کلاس ۳ اسکناس یا ۲ شیراز صافرت کرده است.

- برای هر عدد صحیح  $n$ ، اگر  $n$  زوج باشد، آنگاه  $n^2 + n$  نیز صحیح است.

- عدد صحیح وجود دارد که هم زوج و هم اول است.

- عدد صحیح  $n$  وجود ندارد که هم  $n$  اول است و هم  $n + 6$ .

- برای هر عدد صحیح  $n$ ،  $5 > n^2 + 3$  یا  $n > 2$  است.

- برای هر عدد صحیح  $n$ ،  $n$  یا  $n - 1$  یا  $n - 2$  یا  $n - 3$  بر ۴ قابل تقسیم است.

- برای هر عدد صحیح  $n$ ، اگر  $n^2$  زوج باشد،  $n$  نیز صحیح است.

۷- حملات زیر را دست کم به دو صورت با عبارات ریاضی (به صورت گزاره منطقی) بنویسید.

- هر دانشجوی این کلاس تلفن همراه دارد.

- بعضی از دانشجویان این کلاس به زبان فرانسه مسلط هستند.

- همه دانشجویان این کلاس، حل معادله درجه ۲ را می دانند.

- بعضی از دانشجویان این کلاس نمی خواهند تنبلی کنند.

- هر دانشجوی رشته کامپیوتر باید درس سیستم را گذرانده باشد.

- دانشجویی در این کلاس هست که دست کم یک واحد کامپیوتری گذرانده است.

- هر دانشجوی این کلاس، یا همه کامپیوترها را می داند کار کرده است.

۷۷

۸- تابع گزاره‌ای  $xy=1$  و  $p(x,y)$  را در مجموعه اعداد حقیقی

در تمام حالت‌ها ممکن بنویسید و سپس ارزش گزاره را بنویسید.

۹- فرض  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  را کنید و تابع گزاره‌ای بر مجموعه اعداد

تعیین کنید معادل گزاره‌ای زیر را بنویسید.

$$\exists x \in U, p(x)$$

$$\forall x \in U, p(x)$$

$$\exists x \in U, \neg p(x)$$

$$\forall x \in U, (x \neq 3 \rightarrow p(x)) \vee (\exists x \in U, \neg p(x))$$

۱۰- برای گزاره‌های زیر سوالات بنویسید تا یک گزاره صحیح

تبدیل شود.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$|x+y| = |x| + |y|$$

$$xy = 1$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\cot(x) \times \sin(x) = \cos(x)$$

۱۱- در درستی هم ارزش زیر تحقیق کنید.

$$\forall x \in U, (p(x) \vee q(x)) \equiv (\forall x \in U, p(x)) \vee (\forall x \in U, q(x))$$

۱۲- تحقیق کنید کدام یک از استنباط‌ها زیر معتبر است.

- هیچ ریاضیدانی جاهل نیست - همه افراد جاهل ضرورند بنابراین برخی

از افراد ضرور ریاضیدان نیستند.

- همه اعداد صحیح، اعداد گویا هستند - بعضی از اعداد صحیح، توان از

عدد ۲ می‌باشند بنابراین بعضی از اعداد گویا به صورت توان از ۲ اند.

- همه گاوها، گوسفندوارند - بعضی از حیوانات گوسفند بنابراین برخی از

حیوانات گوسفندوارند.

$$\exists x \exists p(x)$$

$$\forall x, \forall y : (p(x) \rightarrow q(y))$$

$$\forall y : q(y)$$

$$\exists x \exists p(x)$$

$$\exists x \exists \forall y (p(x) \rightarrow q(y))$$

$$\exists y \exists q(y)$$

$$\exists x \exists p(x)$$

$$\exists x \exists \forall y : (p(x) \rightarrow q(y))$$

$$\forall y : q(y)$$

$$\exists x \exists p(x)$$

$$\forall x : \exists y \exists (p(x) \rightarrow q(y))$$

$$\forall y : q(y)$$

۱۹

۱۳- در درستی گزاره زیر تحقیق کنید. مجموعه اعداد صحیح  $\mathbb{Z}$   $\cup \mathbb{Z}$  \*

$$\forall n, n^2 - 2 \geq 0$$

$$\forall n : n^2 - 10n + 21 = 0$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 - 10n + 21 = 0$$

$$\forall n, n^2 - n - 1 \neq 0$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} : 2n^2 - 3n + 1 = 0$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} : [(n^2 > 10) \wedge (\sqrt{12} < n)]$$

$$\forall n, \exists y \in \mathbb{Z} : n^2 = y$$

$$\forall y, \exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = y$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : n^2 = y$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : n = y^2$$

$$* U = \{1, 2, 3\}$$

$$\exists n \in U : \forall y, n^2 < y + 1$$

$$\forall n, \exists y \in U : n^2 + y^2 < 12$$

$$\forall n, \forall y : n^2 + y^2 < 12$$

$$* U = \{+1, -2\}, p(n) : n^2 < 2, q(n) : n > 1$$

$$\forall n, (p(n) \vee q(n))$$

$$\exists n \in U : (p(n) \vee q(n))$$

$$\forall n : [(\sim p(n) \vee (\sim q(n)))]$$

$$\forall n, (\sim p(n) \wedge q(n))$$

$$* U = \mathbb{Z}$$

$$\forall n, n > n + 1$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} : 2n = 3n$$

$$\forall n, n^2 \geq n$$

$$\forall n \exists m \in \mathbb{Z} : m > n^2$$

$$\exists n, m \in \mathbb{Z} : n^2 + m^2 = 5$$

$$\textcircled{10} \exists! x \in \mathbb{N} : x+3=2x$$

$$*U=R$$

$$\exists x, y \in \mathbb{N} : x \neq y$$

$$\exists x, y \in \mathbb{N} : x+y \neq y+x$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (y \neq 0 \rightarrow xy=1)$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x+y=2$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$$

$$*U=\{1,2,3\}$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x < y+1$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 < 12$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 < 12$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : (x+y < 5 \wedge x^2 - y^2 = 8)$$

۱۴- فرض کنید  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  یک دنباله از اعداد حقیقی باشد بطوریکه از زیر  
 راجع به آن گفته شده است.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{n}$$

آنگاه که از آنجا که  $a_n$  ها بر مبنای  $\frac{1}{n}$  می‌روند.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n - a_{n-1} > \frac{1}{n}$$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n - a_{n-1} > \frac{1}{n} \wedge a_n - a_{n-1} < -\frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : a_n - a_{n-1} > \frac{1}{n} \wedge a_n - a_{n-1} < -\frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_n) > \frac{1}{n}$$